PRACE
INSTYTUTU AERODYNAMICZNEGO
W WARSZAWIE

Prowadzone pod kierunkiem prof. C. Witoszyńskiego.

Zeszyt I.

TRAVAUX
DE L'INSTITUT AÉRODYNAMIQUE
DE VARSOVIE

Exécutés sous la direction du prof. C. Witoszyński.

Fascicule I.

WYDANE NAKŁADEM INSTYTUTU BADAŃ TECHNICZNYCH LOTNICTWA
WARSZAWA — 1927.

ERRATA.

Page 7, ligne 4, *au lieu de* $(\cos n\mu - i \sin n\vartheta)$, *lire* $(\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta)$.

„ 8, „ 5, *après* la formule, *ajouter le numéro* (13).

„ 10, „ 1, *au lieu de* $[\cos n(\pi+\alpha) - \cos n\vartheta]$, *lire* $[\cos n(\pi+\alpha) - \cos n\beta]$.

„ 10, „ 2, „ „ „ $[\sin n(\pi+\alpha) + \sin n\vartheta]$, „ $[\sin n(\pi+\alpha) + \sin n\beta]$.

„ 24, „ 3, „ „ „ $\frac{1+\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon+\varepsilon^2}}{3}$, *lire* $\frac{1+\varepsilon+\sqrt{1-\varepsilon+\varepsilon^2}}{3}$.

„ 25, „ 6, „ „ „ $\varphi_1 = \vartheta \mp \pi + \alpha$, „ $\varphi_1 = \vartheta \mp \pi - \alpha$.

„ 28, „ 5 en remontant, *au lieu de* $-\pi+\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \gamma_i$, *lire* $-\pi+\alpha \leqslant \vartheta \leqslant -\gamma_i$.

„ 35, colonne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2}$, pour $\vartheta = 349^0, 350^0 \ldots\ldots 359^0$, *remplacer* dans la partie entière 1 par 0.

„ 43, ligne 8 en remontant, *au lieu de* x_1, y_1, *lire* X_1, Y_1.

„ 43, „ 6 „ „ „ x, y, „ X, Y.

„ 44, „ 1, *au lieu de* a, *lire* la.

„ 46, fig. 2, *remplacer* X, Y par ξ, η.

„ 50, ligne 4 en remontant, *au lieu de* $\left\{\left[-e^{i\alpha} - \frac{a^2}{Z^2} e^{-i\alpha} - \right.\right.$, *lire* $\left\{\left[-e^{i\alpha} + \frac{a^2}{Z^2} e^{-i\alpha} - \right.\right.$.

PRACE
INSTYTUTU AERODYNAMICZNEGO
W WARSZAWIE

Prowadzone pod kierunkiem prof. C. Witoszyńskiego.

Zeszyt I.

TRAVAUX
DE L'INSTITUT AÉRODYNAMIQUE
DE VARSOVIE

Exécutés sous la direction du prof. C. Witoszyński.

Fascicule I.

WYDANE NAKŁADEM INSTYTUTU BADAŃ TECHNICZNYCH LOTNICTWA
WARSZAWA — 1927

TREŚĆ:

SOMMAIRE:

JULJAN BONDER, ingénieur.

SUR LA CONSTRUCTION DES PROFILS D'AVIATION.

Dans ce travail se trouve exposée une méthode générale servant à la construction des profils d'aviation. Elle permet de réaliser les profils les plus variés. Son but est de fournir un instrument à l'aide duquel un constructeur ait la possibilité de tracer des profils présentant des propriétés géométriques répondant à des conditions préalablement posées — par exemple: des profils ayant une épaisseur donnée, ou bien présentant une concavité plus ou moins accentuée, ou encore ayant les ordonnées maxima ou minima réparties d'une manière déterminée, etc.

Pour les applications pratiques de notre méthode il est nécessaire de se servir des valeurs numériques de certaines séries infinies. Les tables de ces valeurs [1]) se trouvent à la fin de ce travail. Ces tables pourraient, peut-être, être utilisées aussi pour d'autres problèmes des mathématiques appliquées.

Dans ce qui va suivre nous ne nous occuperons pas de questions d'aérodynamique propre (c. à. d. des propriétés des profils au point de vue des forces), nous n'en envisagerons que quelques notions préliminaires. Les principes de l'aérodynamique sont pourtant indispensables pour se rendre compte des idées directrices de la géométrie des profils d'aviation. En cette matière nous renvoyons le lecteur aux traités d'aérodynamique et principalement à l'ouvrage du professeur Witoszyński [2]), qui sera souvent cité ici.

§ 1.

Les recherches modernes sur les profils d'aviation ne se bornent pas seulement aux essais des laboratoires. On s'efforce surtout de trouver des bases théoriques pour relier les conceptions théoriques avec les résultats des expériments. Or, une étude théorique n'est applicable qu'à des profils déterminés par des formules analytiques. C'est la méthode de la représentation conforme qu'on emploie généralement dans ce but.

On considère deux variables complexes: $Z = X + iY$ et $z = x + iy$. Les valeurs de ces variables sont représentées par des points de deux plans correspondants. On choisit un cercle, décrit dans le plan Z, comme profil primitif. Soit l'origine des coordonnées O le centre de ce cercle, a — son rayon.

---

[1]) Les calculs ont été exécutés par MM. K. Izdebski, J. Boukowski et K. Batorski, assistants de l'Institut Aérodynamique.

[2]) C. Witoszyński, La Mécanique des Profils d'Aviation, Paris, éd. Chiron, 1924.

Son équation s'écrit:

$$\left.\begin{aligned} Z &= a e^{i\vartheta}; \\ X = a\cos\vartheta; &\qquad Y = a\sin\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ou bien:

ϑ désignant l'angle polaire (fig. 1).

Chaque relation fonctionnelle de la forme:

$$z = F(Z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

permet de transformer le cercle primitif en une autre courbe située dans le plan z et ne dépendant que de la forme de la fonction (2) qu'on appelle „fonction de transformation". Pour qu'on puisse employer cette courbe comme profil d'aviation, les conditions suivantes sont à remplir.

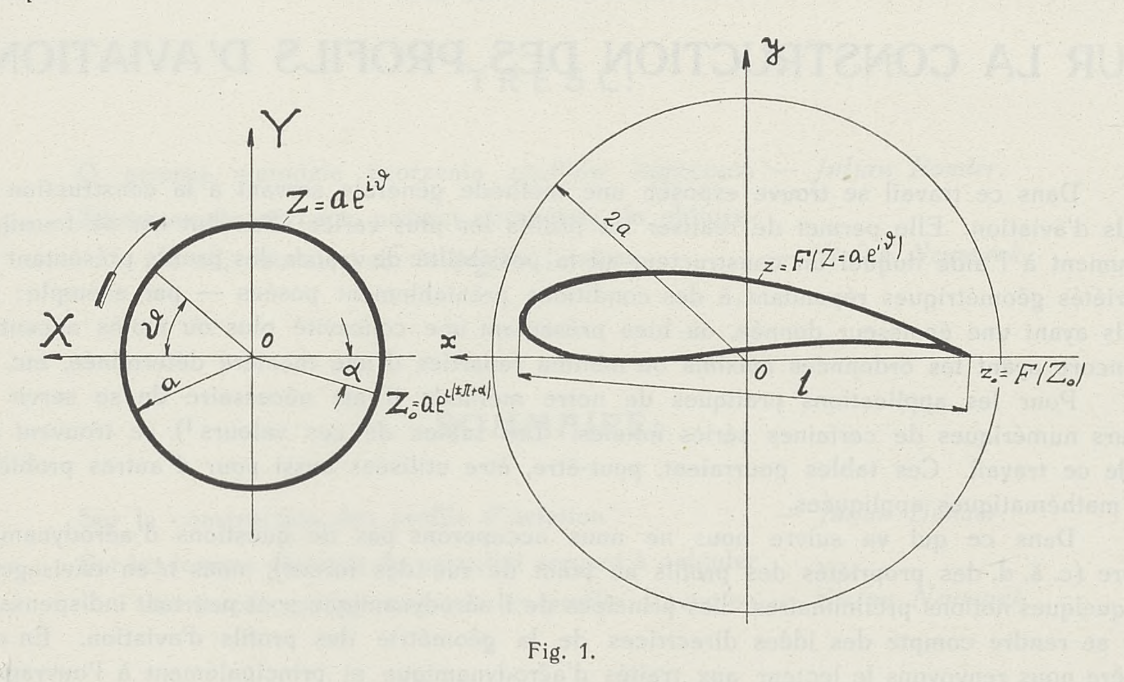


Fig. 1.

1) Il faut évidemment que la courbe soit fermée et qu'elle ne possède pas des points doubles.

2) La représentation doit être uniforme; par conséquent, si on développe la dérivée $\frac{dz}{dZ}$ par puissances de Z, la série obtenue ne peut pas renfermer le terme $\frac{\text{const}}{Z}$ [1]).

3) Il faut que cette dérivée tende vers l'unité lorsque le module de Z augmente indéfiniment [1]):

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{Z=\infty} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

4) Les conditions précédentes exigent que la longueur l du profil transformé (fig. 1) satisfasse à l'inégalité [2]):

$$2a \leqslant l \leqslant 4a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

---

[1]) Witoszyński, l. c., art. 3, 4, 6.

[2]) Mises — Zur Theorie des Tragflächenauftriebes, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, vol. 1917, p. 157 et vol. 1920, p. 68.

5) Les pôles de la fonction $\frac{dZ}{dz}$ ne doivent pas se trouver à l'extérieur du cercle primitif. C'est indispensable pour que la vitesse y reste finie.

6) Le profil d'aviation possède toujours une „pointe“ à l'arrière ou, pour le moins, un point où la courbure est tellement accentuée qu'on puisse le regarder pratiquement comme une pointe. Par le terme „pointe“ sera désigné un point de rebroussement ou bien un point anguleux, tous les deux satisfaisant à l'équation:

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{Z=Z_0} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

où $Z_0 = a\,e^{i(\pi+\alpha)}$ désigne un point de la circonférence (fig. 1).

On peut remplacer l'équation (5) par les deux suivantes:

$$\left(\frac{dx}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta=\pm\pi+\alpha} = 0; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5')$$

$$\left(\frac{dy}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta=\pm\pi+\alpha} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5'')$$

La position du point Z_0, déterminée par l'angle α, est d'une grande importance pour le profil d'aviation; en effet, l'aérodynamique nous apprend que la valeur de la force portante dépend de cet angle α et (pour des petites valeurs de α) s'exprime par la formule:

$$P_y \cong \alpha\,a\,u^2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

où u — est la vitesse de l'avion.

En appliquant la méthode de la représentation conforme on peut obtenir une infinité de groupes diverses de profils. Le profil rectiligne est l'exemple le plus simple qu'on puisse étudier. Sa fonction de transformation s'exprime:

$$\frac{z}{a} = F\left(\frac{Z}{a}\right) = \frac{Z}{a} + \frac{a}{Z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

En effet, si on introduit dans l'équation (7) $Z = a\,e^{i\vartheta}$, il vient:

$$\frac{z}{a} = e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2\cos\vartheta,$$

d'où: $x = 2a\cos\vartheta$; $y = 0$.

Ceci exprime la portion de l'axe des x dont la longueur est $4a$. Si nous voulons obtenir le même profil tourné d'un angle α dans le sens positif, il faut évidemment remplacer dans la formule (7) a par $a\,e^{i\alpha}$. Nous trouverons ainsi (fig. 2):

$$z = Z + \frac{a^2\,e^{2i\alpha}}{Z}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7')$$

d'où les coordonnées du profil:

$$x = 2a\cos\alpha\cos(\vartheta - \alpha)\,; \quad y = 2a\sin\alpha\cos(\vartheta - \alpha)\,.$$

On peut appliquer ce procédé à chaque profil, puisque de cette manière nous ne faisons en realité qu'une rotation des axes de deux systèmes d'un angle α, dans le sens négatif.

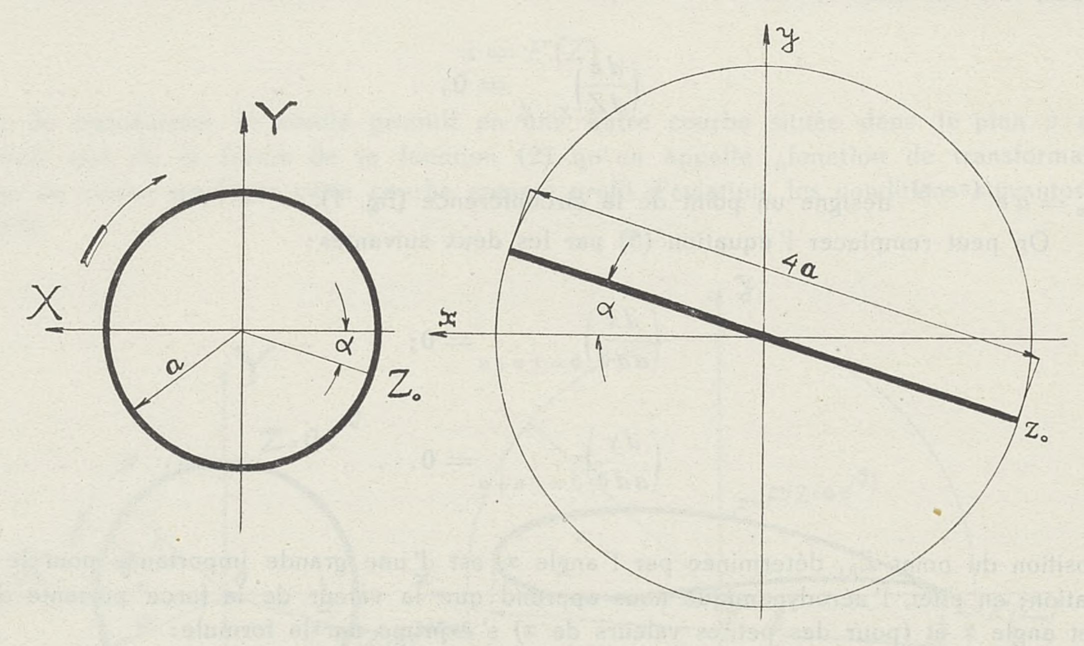


Fig. 2.

Pour des autres profils on obtiendra la fonction de transformation en ajoutant a la fonction (7) des termes supplémentaires contenant des puissances négatives de Z. Nous proposons pour la fonction complétée la forme suivante:

$$\frac{z}{a} = F\left(\frac{Z}{a}\right) = \frac{Z}{a} + \frac{a}{Z} + \sum \frac{C_n a^n}{Z^n}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

où les coefficients $C_n = A_n + iB_n$ sont complexes. Le symbole Σ désigne ici une somme en général infinie qui se ramène cependant dans certains cas à une expression algébrique finie (les profils bien connus de Joukowski, les profils bipolaires [1]) etc.).

Les expressions de ce genre sont sans doute commodes au calcul numérique, mais elles présentent d'autres défauts: en premier lieu, la fonction de transformation une fois choisie, on ne peut changer la forme du profil que dans des limites étroites; ensuite, il y a certains profils, qu'on ne peut point réaliser à l'aide d'une fonction contenant une quantité finie de termes (par exemple ceux qui possèdent la partie inférieure plane et qui sont employés souvent comme les éléments de l'hélice). C'est pourquoi nous donnons dans la suite à la fonction (8) la forme d'une série infinie avec des coefficients indéterminés.

Soit donc:

$$\frac{z}{a} = \frac{Z}{a} + \frac{a}{Z} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + iB_n)\,\frac{a^n}{Z^n}\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

---

[1]) Witoszyński, l. c., art. 10.

En tenant compte de l'équation du cercle primitif: $Z = a e^{i\vartheta}$, nous obtenons:

$$\frac{x+iy}{a} = e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + i B_n)\, e^{-in\vartheta},$$

ou:

$$\frac{x+iy}{a} = 2\cos\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + i B_n)(\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta).$$

De là, — les coordonnées du profil transformé:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta)\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\frac{y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\vartheta - A_n \sin n\vartheta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Les coefficients A_n et B_n étant arbitraires, on doit les choisir convenablement pour donner au profil des propriétés désirées. Mais, au lieu de les définir directement, il sera plus avantageux d'établir une relation fonctionnelle entre une de coordonnées, par exemple y, et l'angle polaire ϑ du point courant de la circonférence primitive. Nous trouverons ensuite les coefficients A_n et B_n en observant que $\sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\vartheta - A_n \sin n\vartheta)$ est un développement de la fonction $\frac{y}{a}$ en série de Fourier, à une constante près. En calculant les coefficients de Fourier qui s'expriment par les intégrales bien connus, nous prenons comme le point de départ le point Z_0 qui correspond à la „pointe" du profil transformé (fig. 1 et 2). Ainsi, les limites d'intégration seront: $-\pi + \alpha$ et $+\pi + \alpha$. Il en résultera:

$$\left.\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{y}{a} \cos n\Theta \, d\Theta, \\ -A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{y}{a} \sin n\Theta \, d\Theta, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

où la variable ϑ est remplacée par Θ pour ne pas la confondre avec la coordonnée polaire ϑ qu'on rencontre dans les formules (10) et (11).

La fonction y ainsi que sa première dérivée doivent être continues dans l'intervalle de l'intégration [1]). Il n'est point nécessaire cependant qu'elle s'exprime dans tout l'intervalle par la même expression analytique. S'il y en a plusieurs, il faut effectuer l'intégration séparément pour chaque sous-intervalle.

Les expressions pour la fonction y choisies, on peut trouver successivement les coefficients A_n et B_n à l'aide de (12) et la fonction x d'après (10); mais il est facile d'établir

---

[1]) Comme le profil doit être fermé, il est évidemment nécessaire que les valeurs de y correspondant à $\vartheta = -\pi + \alpha$ et $\vartheta = \pi + \alpha$ soient égales.

une relation directe entre x et $y = f(\Theta)$. En effet, si on remplace dans (10) A_n et B_n par leurs expressions (12), on aura:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\cos n\vartheta \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{y}{a}\sin n\Theta\, d\Theta + \sin n\vartheta \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{y}{a}\cos n\Theta\, d\Theta\right),$$

ou

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{y}{a}\sin n(\vartheta - \Theta)\, d\Theta.$$

L'expression de la fonction y doit contenir: premièrement un nombre suffisant de coefficients arbitraires pourqu'on puisse remplir les conditions mentionnées; en second lieu, quelques paramètres surnuméraires qui permettront de changer la forme des profils appartenant aux groupes particuliers.

§ 2.

Comme premier exemple, considérons le profil dont les ordonnées sont déterminées par deux formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 0 && \text{pour} \quad -\pi + \alpha \leqslant \vartheta \leqslant -\beta; \\ y_2 &= k_2\, a \sin^2[\lambda_2(\vartheta + \beta)] && \quad ,, \quad\quad -\beta \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \alpha. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

On voit que la partie inférieure de ce profil est rectiligne.

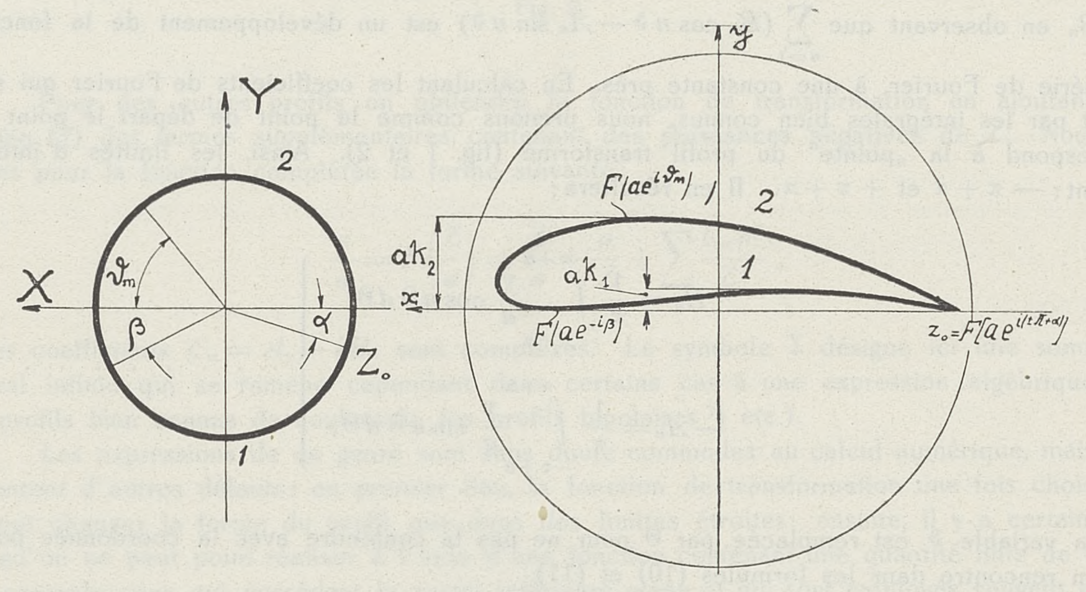


Fig. 3.

Il sera utile d'expliquer ici le système de notations que nous avons admis (fig. 3). Comme nous l'avons indiqué précédemment, a désigne le rayon du cercle primitif; l'angle $\pm\pi + \alpha$ indique ce point du cercle en question auquel correspond la pointe du profil transformé. Ainsi, le profil est décalé de l'angle α de sa *position zéro* (c'est-à-dire de la position telle que la pointe corresponde au point $\vartheta = \pi$ ou $Z = -a$) [1]).

[1]) Witoszyński, l. c., art. 10.

Nous divisons le profil circulaire primitif en plusieurs arcs, chacun d'eux correspondant à une partie du profil transformé dont toutes les ordonnées sont déterminées par la même formule analytique. La pointe correspond toujours à un point de division. Les arcs du cercle et les parties du profil correspondantes sont numérotés dans le sens positif; les mêmes numéros sont employés comme indices dans toutes les expressions concernant des arcs particuliers, par exemple dans les formules (14). Nous désignerons par ak_n l'ordonnée *maximum* ou *minimum* de la partie n-ième du profil. S'il n'y aura qu'une seule formule pour les ordonnées, nous supprimerons l'indice. Les angles polaires des points de division seront désignés par des lettres grecques: β, γ etc.; en particulier, l'angle β se rapportera au point auquel correspond le point d'intersection ou de tangence du profil transformé avec l'axe x. (Ces angles seront mesurés dans certains cas dans le sens opposé au sens accépté — par exemple l'angle β de la fig. 3).

Le paramètre λ_2 dans les formules (14) ne peut pas être choisi arbitrairement; en effet, la pointe appartient simultanément à deux arcs du profil, ce qui entraîne l'égalité:

$$y_2 = y_1 = 0 \qquad \text{pour} \quad \vartheta = \mp \pi + \alpha \qquad \text{d'où:} \quad \sin^2 \lambda_2 (\pi + \alpha + \beta) = 0\,,$$

donc:

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{\pi + \alpha + \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Nous désignerons, en général, par λ_n le rapport du demi-périmètre du cercle à la longueur du n-ième arc de ce cercle. On aura donc $\lambda_n \geqslant \frac{1}{2}$, le signe d'égalité se rapportant aux profils dont les ordonnées s'expriment par une seule formule.

Nous allons maintenant déterminer des coefficients A_n et B_n de la fonction de représentation correspondant aux formules (14). En vertu de (12) nous écrirons:

$$A_n = -\frac{k_2}{\pi} \int_{-\beta}^{\pi+\alpha} \sin^2 \lambda_2 (\Theta + \beta) \sin n\,\Theta\, d\,\Theta\,;$$

$$B_n = \frac{k_2}{\pi} \int_{-\beta}^{\pi+\alpha} \sin^2 \lambda_2 (\Theta + \beta) \cos n\,\Theta\, d\,\Theta\,.$$

Après avoir effectué l'intégration nous trouvons, en tenant compte de (15):

$$\left.\begin{aligned} A_n &= -\frac{2\,k_2\,\lambda_2{}^2}{\pi\,n\,(n^2 - 4\lambda_2{}^2)} \left[\cos n\,(\pi + \alpha) - \cos n\,\beta\right]; \\ B_n &= -\frac{2\,k_2\,\lambda_2{}^2}{\pi\,n\,(n^2 - 4\lambda_2{}^2)} \left[\sin n\,(\pi + \alpha) + \sin n\,\beta\right]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Ces formules deviennent indéfinies pour $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ (c. à. d. $\beta = \pi - \alpha$). Par conséquent, nous n'admettrons, dans ce qui suit, que des valeurs de λ_2 satisfaisant à l'inégalité:

$$\frac{1}{2} < \lambda_2 < 1, \qquad \text{d'où résulte:} \quad \pi - \alpha > \beta > -\alpha. \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

En substituant les expressions (16) dans (10), nous trouvons la formule qui sert à calculer des abscisses des points du profil transformé:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta - \frac{2k_2\lambda_2^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\cos n(\pi+\alpha) - \cos n\vartheta]\cos n\vartheta}{n(n^2-4\lambda_2^2)} -$$

$$\frac{2k_2\lambda_2^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\sin n(\pi+\alpha) + \sin n\vartheta]\sin n\vartheta}{n(n^2-4\lambda_2^2)};$$

ou:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta - \frac{2k_2\lambda_2^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\vartheta-\pi-\alpha)}{n(n^2-4\lambda_2^2)} + \frac{2k_2\lambda_2^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\vartheta+\beta)}{n(n^2-4\lambda_2^2)} \quad . \quad . \quad (18)$$

Il faut ici encore tenir compte des conditions (5') et (5''):

$$\left(\frac{dx}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta=\pm\pi+\alpha} = 0; \qquad \left(\frac{dy}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta=\pm\pi+\alpha} = 0.$$

La seconde équation est vérifiée toujours par les fonctions (14); la première sert à déterminer le paramètre k_2 en fonction des autres paramètres. De la formule (18) nous tirons:

$$\frac{dx}{a\,d\vartheta} = -2\sin\vartheta + \frac{2k_2\lambda_2^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(\vartheta-\pi-\alpha)}{n^2-4\lambda_2^2} - \frac{2k_2\lambda_2^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(\vartheta+\beta)}{n^2-4\lambda_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

La substitution $\vartheta = \pm\pi+\alpha$ doit annuler l'expression (19), d'où nous trouvons:

$$k_2 = \frac{\pi\sin\alpha}{\lambda_2^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(\pi+\alpha+\beta)}{n^2-4\lambda_2^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Il est à remarquer que les profils considérés présentent deux tangentes à la pointe; en effet, l'axe x est tangente en dessous tandis que l'arc supérieur possède une autre tangente dont le coefficient angulaire s'exprime par:

$$\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{\vartheta=\pi+\alpha} = \left(\frac{dy_2}{a\,d\vartheta} : \frac{dx}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta=\pi+\alpha} = \frac{0}{0} = \left(\frac{d^2y_2}{a\,d\vartheta^2} : \frac{d^2x}{a\,d\vartheta^2}\right)_{\vartheta=\pi+\alpha};$$

or, cette expression n'est pas nulle, puisque:

$$\left(\frac{d^2y}{a\,d\vartheta^2}\right)_{\vartheta=\pi+\alpha} = 2k_2\lambda_2^2 \neq 0.$$

Nous allons maintenant généraliser les formules (14), en posant:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_1}{a} &= k_1\sin^2[\lambda_1(\vartheta+\beta)] \quad \text{pour} \quad -\pi+\alpha \leqslant \vartheta \leqslant -\beta; \\ \frac{y_2}{a} &= k_2\sin^2[\lambda_2(\vartheta+\beta)] \quad \text{,,} \quad -\beta \leqslant \vartheta \leqslant \pi+\alpha. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Ces formules déterminent des profils dont la partie inférieure est concave ou convexe selon le signe du coefficient k_1 (fig. 3).

Les paramètres λ_1 et λ_2 sont soumis à la condition évidente:

$$y_1 = y_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \vartheta = \mp \pi + \alpha ,$$

d'où:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{\pi - \alpha - \beta}; \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{\pi + \alpha + \beta} . \qquad (22)$$

En déterminant les coefficients A_n et B_n on peut simplifier les calculs: en effet, écrivons les formules (12) de la façon suivante:

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{-\beta} \frac{y_1}{a} \cos n \Theta \, d\Theta + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\pi+\alpha} \frac{y_2}{a} \cos n \Theta \, d\Theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{-\beta} \frac{y_1}{a} \cos n \Theta \, d\Theta + \frac{1}{-\pi} \int_{-(-\pi)+\alpha}^{-\beta} \frac{y_2}{a} \cos n \Theta \, d\Theta;$$

on voit facilement qu'il suffit de calculer la première intégrale; on peut en tirer la seconde en remplaçant partout l'indice 1 par 2 et π par $(-\pi)$; cette remarque se rapporte aussi au coefficient A_n. On retrouvera la même simplification chaque fois, quand le profil sera formé de deux arcs déterminés par des expressions semblables ne différant que par leurs indices.

Nous aurons de cette manière:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2 k_1 \lambda_1^2}{\pi n (n^2 - 4 \lambda_1^2)} [\cos n (\pi + \alpha) - \cos n \beta] - \frac{2 k_2 \lambda_2^2}{\pi n (n^2 - 4 \lambda_2^2)} [\cos n (\pi + \alpha) - \cos n \beta]; \\ B_n &= \frac{2 k_1 \lambda_1^2}{\pi n (n^2 - 4 \lambda_1^2)} [\sin n (\pi + \alpha) + \sin n \beta] - \frac{2 k_2 \lambda_2^2}{\pi n (n^2 - 4 \lambda_2^2)} [\sin n (\pi + \alpha) + \sin n \beta]; \end{aligned} \right\}, \qquad (23)$$

d'où:

$$\frac{x}{a} = 2 \cos \vartheta + \frac{2 k_1 \lambda_1^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n (\vartheta - \pi - \alpha) - \cos n (\vartheta + \beta)}{n (n^2 - 4 \lambda_1^2)} -$$

$$- \frac{2 k_2 \lambda_2^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n (\vartheta - \pi - \alpha) - \cos n (\vartheta + \beta)}{n (n^2 - 4 \lambda_2^2)} . \qquad (24)$$

Les coefficients k_1 et k_2 sont liés par la relation:

$$k_2 = \frac{\pi \sin \alpha + k_1 \lambda_1^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n (\pi + \alpha + \beta)}{n^2 - 4 \lambda_1^2}}{\lambda_2^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n (\pi + \alpha + \beta)}{n^2 - 4 \lambda_2^2}} , \qquad (25)$$

que l'on déduit de l'équation caractéristique de la pointe (5'):

$$\left(\frac{dx}{a \, d\vartheta} \right)_{\vartheta = \mp \pi + \alpha} = 0 .$$

§ 3.

Nous rencontrons dans les formules (18) et (24) du § précédent les séries telles que:

$$S(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n(n^2 - p^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

où, pour abréger, nous avons remplacé 2λ par p. Ces séries sont convergentes, néanmoins on aurait des grandes difficultés pour les calculer directement, parce que leur convergence n'est pas assez rapide. Mais il y a certaines valeurs du paramètre λ, pour lesquelles on peut réduire les séries mentionnées aux expressions finies. Il est facile de démontrer que $S(\vartheta)$ vérifie l'équation différentielle:

$$S'' + p^2 S - \ln\left(2 \sin\frac{\vartheta}{2}\right) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

En effet, nous tirons de (26):

$$S'' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\vartheta}{n^2 - p^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n} - p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n(n^2 - p^2)} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

En introduisant (26) et (28) dans l'équation (27), nous trouvons la formule connue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n} = -\ln\left(2 \sin\frac{\vartheta}{2}\right) \text{[1]}.$$

L'équation différentielle (27) est linéaire du second ordre. Son équation caractéristique ayant des racines imaginaires, l'intégrale générale sera de la forme:

$$S = w_1 \cos p\vartheta + w_2 \sin p\vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

donc:

$$S' = -p w_1 \sin p\vartheta + p w_2 \cos p\vartheta,$$

où nous avons posé:

$$w_1' \cos p\vartheta + w_2' \sin p\vartheta = 0.$$

Par conséquent:

$$S'' = -p^2 (w_1 \cos p\vartheta + w_2 \sin p\vartheta) - p w_1' \sin p\vartheta + p w_2' \cos p\vartheta =$$

$$= -p^2 S - p w_1' \sin p\vartheta + p w_2' \cos p\vartheta.$$

Ainsi, w_1' et w_2' sont déterminés par le système des équations linéaires suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} & w_1' \cos p\vartheta + w_2' \sin p\vartheta = 0; \\ & -p w_1' \sin p\vartheta + p w_2' \cos p\vartheta = \ln\left(2 \sin\frac{\vartheta}{2}\right); \end{aligned} \right.$$

---

[1]) Knopp — Unendliche Reihen, Springer, Berlin, 1924, p. 378 (la formule 214).

d'où:

$$w_1' = -\frac{1}{p} \sin p\vartheta \,.\, \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$w_2' = \frac{1}{p} \cos p\vartheta \,.\, \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right).$$

En intégrant par parties nous trouvons:

$$w_1 = \frac{1}{p^2} \cos p\vartheta \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{1}{2p^2} \int \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos p\vartheta \, d\vartheta\,;$$

$$w_2 = \frac{1}{p^2} \sin p\vartheta \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{1}{2p^2} \int \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sin p\vartheta \, d\vartheta;$$

ce qui introduit dans (29), donne:

$$S = \frac{1}{p^2} \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\cos p\vartheta}{2p^2} \int \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos p\vartheta \, d\vartheta - \frac{\sin p\vartheta}{2p^2} \int \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sin p\vartheta \, d\vartheta\,. \quad . \quad (30)$$

Mais à cause de:

$$\int \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos p\vartheta \, d\vartheta = -\int \frac{1-\cos p\vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta + \int \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \, d\vartheta =$$

$$= -\int \frac{1-\cos p\vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta + 2 \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right),$$

on pourra écrire (30) sous la forme:

$$S = \frac{1-\cos p\vartheta}{p^2} \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{\cos p\vartheta}{2p^2} \int \frac{1-\cos p\vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta -$$

$$- \frac{\sin p\vartheta}{2p^2} \int \frac{\sin p\vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta\,.\,^{1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

---

[1]) Nous trouvons dans la formule (31) l'expression: $\frac{1-\cos p\vartheta}{p^2} \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{2 \sin^2 p \frac{\vartheta}{2}}{p^2} \ln\left(2 \sin \frac{\vartheta}{2}\right)$ qui devient indéterminée lorsque $\vartheta = 0$. Mais cette indétermination est du genre $x^2 \ln x$, donc elle tend vers zéro avec ϑ.

L'intégration exécutée, cette formule contiendra deux constantes: C_1 multiplié par $\frac{\cos p\vartheta}{2p^2}$ et C_2 multiplié par $-\frac{\sin p\vartheta}{2p^2}$. On pourra les déterminer le plus simplement, en considérant la dérivée:

$$S'(\vartheta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2 - p^2}$$

et en observant les identités évidentes:

$$S'(0) = 0; \qquad S'(\pi) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Considérons quelques exemples. Soit $\lambda = \frac{2}{3}$ c. à. d. $p = \frac{4}{3}$; on trouvera:

$$\int \frac{1 - \cos\frac{4}{3}\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} \cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = \frac{3}{8}\left(1 - \cos\frac{4}{3}\vartheta\right) - 3\cos\frac{\vartheta}{3} + \frac{3}{2}\ln\left(1 + 2\cos\frac{\vartheta}{3}\right) + C_1;$$

$$\int \frac{\sin\frac{4}{3}\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} \cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = \frac{3}{8}\sin\frac{4}{3}\vartheta + 3\sin\frac{\vartheta}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\vartheta}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{6}\right)} + C_2.$$

Nous déterminons les constantes C_2 es C_1 d'après (32): $C_2 = 0$; $C_1 = -\frac{3}{8} + \ln 2$.

Nous aurons ainsi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n\left(n^2 - \frac{16}{9}\right)} = \frac{9}{16}\left\{\left(1 - \cos\frac{4}{3}\vartheta\right)\ln\left(2\sin\frac{\vartheta}{2}\right) - \right.$$

$$- \left[\frac{3}{16}\cos\frac{4\vartheta}{3} + \frac{3}{2}\cos\frac{\vartheta}{3} - \frac{3}{4}\ln\left(1 + 2\cos\frac{\vartheta}{3}\right) - \frac{1}{2}\ln 2\right]\cos\frac{4\vartheta}{3} -$$

$$\left. - \left[\frac{3}{16}\sin\frac{4\vartheta}{3} + \frac{3}{2}\sin\frac{\vartheta}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\vartheta}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{6}\right)}\right]\sin\frac{4\vartheta}{3}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Soit encore $\lambda = \frac{3}{4}$ c. à. d. $p = \frac{3}{2}$; on trouvera d'une façon analogue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n\left(n^2 - \frac{9}{4}\right)} = \frac{4}{9}\left\{\left(1 - \cos\frac{3\vartheta}{2}\right)\ln\left(2\sin\frac{\vartheta}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{3}\cos\frac{3\vartheta}{2} + 2\cos\frac{\vartheta}{2} - \ln\left(1 + \cos\frac{\vartheta}{2}\right) - \ln 2\right]\cos\frac{3\vartheta}{2} - \left(\frac{1}{3}\sin\frac{3\vartheta}{2} + 2\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\frac{3\vartheta}{2}\right\}. \quad (34)$$

§ 4.

Nous allons examiner maintenant une grande famille de profils qui présentent pour le constructeur l'avantage de permettre d'obtenir facilement les formes demandées.

Pour ces profils y s'exprime comme un polynome entier en ϑ ou bien Θ de degré m; par conséquent toutes les dérivées de y par rapport à Θ sont nulles à partir de la m-ième. Donc, on pourra effectuer l'intégration par parties dans la formule générale (13):

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{y}{a}\sin n(\vartheta-\Theta)\,d\Theta\,;$$

on aura:

$$\int\frac{y}{a}\sin n(\vartheta-\Theta)\,d\Theta = \frac{y}{a}\cdot\frac{\cos n(\vartheta-\Theta)}{n} + \frac{dy}{a\,d\Theta}\cdot\frac{\sin n(\vartheta-\Theta)}{n^2} -$$

$$-\frac{d^2y}{a\,d\Theta^2}\cdot\frac{\cos n(\vartheta-\Theta)}{n^3} - \frac{d^3y}{a\,d\Theta^3}\cdot\frac{\sin n(\vartheta-\Theta)}{n^4} + \frac{d^4y}{a\,d\Theta^4}\cdot\frac{\cos n(\vartheta-\Theta)}{n^5} + \ldots \quad (35)$$

Nous utiliserons dans la suite la formule précédente en l'écrivant sous la forme:

$$\int\frac{y}{a}\sin n(\varphi-qt)\,dt = \frac{y}{a}\cdot\frac{\cos n(\varphi-qt)}{qn} + \frac{dy}{a\,dt}\cdot\frac{\sin n(\varphi-qt)}{q^2n^2}$$

$$-\frac{d^2y}{a\,dt^2}\cdot\frac{\cos n(\varphi-qt)}{q^3n^3} - \frac{d^3y}{a\,dt^3}\cdot\frac{\sin n(\varphi-qt)}{q^4n^4} + + - - \ldots \quad (35a)$$

Il faut remarquer que les deux premiers membres dans les formules (35) et (35a) c'est-à-dire $\frac{\cos n(\vartheta-\Theta)}{n}$ et $\frac{\sin n(\vartheta-\Theta)}{n^2}$ ne se trouvent là qu'en apparence. En effet, après avoir effectué l'intégration entre les limites indiquées, nous obtenons ces deux premiers termes sous la forme:

$$\frac{1}{a}y_m(\pi+\alpha)\frac{\cos n(\vartheta-\pi-\alpha)}{n} - \frac{1}{a}\left[y_m(\Theta_{m-1}) - y_{m-1}(\Theta_{m-1})\right]\frac{\cos n(\vartheta-\Theta_{m-1})}{n} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{a}y_1(-\pi+\alpha)\frac{\cos n(\vartheta+\pi-\alpha)}{n}\,;$$

$$\frac{1}{a}y'_m(\pi+\alpha)\frac{\sin n(\vartheta-\pi-\alpha)}{n^2} - \frac{1}{a}\left[y'_m(\Theta_{m-1}) - y'_{m-1}(\Theta_{m-1})\right]\frac{\sin n(\vartheta-\Theta_{m-1})}{n^2} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{a}y'_1(-\pi+\alpha)\frac{\sin n(\vartheta+\pi-\alpha)}{n^2}\,;$$

Donc, il est évident que les expressions entre parenthèses s'annulent, car nous avons supposé que la fonction y, ainsi que sa dérivée première, sont continues et satisfont aux relations:

$$\left(\frac{y}{a}\right)_{\vartheta=-\pi+\alpha} = \left(\frac{y}{a}\right)_{\vartheta=\pi+\alpha}\,; \qquad \left(\frac{dy}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta=-\pi+\alpha} = \left(\frac{dy}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta=\pi+\alpha} = 0\,.$$

L'étude détaillée de ces profils exige certains calculs préliminaires. En effet, nous avons vu que les abscisses x et leurs dérivées par rapport à ϑ s'expriment à l'aide des séries infinies suivantes:

$$T_{2p+1}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^{2p+1}} \quad \text{et} \quad W_{2p}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^{2p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

où $p = 1, 2, 3 \ldots.$ Donc, nous aurons besoin de valeurs numériques de leurs sommes, inclusivement $W_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^2}$; la dernière somme disparaît dans la formule exprimant x, mais on la rencontre de nouveau dans l'expression de la dérivée $\frac{dx}{a\,d\vartheta}$.

Les tables de sommes considérées sont calculées pour les valeurs de φ entre 0^0 et 180^0 de degré en degré. L'approximation qu'on a obtenu est celle de sept décimales; en certains endroits cependant l'erreur atteint jusqu'à 0,0000002. Le calcul a été exécuté pour des séries avec les dénominateurs depuis n^2 jusqu'à n^9.

On aurait des grandes difficultés, si on voulait calculer ces sommes directement; cela se rapporte particulièrement à ces séries qui ont des petites puissances de n aux dénominateurs. C'est pourquoi on a appliqué la méthode directe exclusivement aux sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^8}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^9}$ (il suffit dans ces deux cas de calculer huit ou neuf termes des séries). Quant aux autres sommes, il est avantageux de les transformer préalablement de la façon que leur convergence devienne plus rapide.

Nous réalisons ces transformations de la manière suivante. Considérons le développement [1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

juste pour toutes les valeurs de φ dans intervalle: $0 < \varphi < 2\pi$. Nous l'écrirons encore d'une autre manière:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\varphi - \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{\varphi}\right) d\frac{\varphi}{2},$$

ou, en developpant $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{\varphi}$ [2]) et en intégrant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}\,\varphi^{2n}}{2n\,.\,(2n)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

---

[1]) Knopp, l. c., p. 378, la formule 214.

[2]) Ibidem, p. 204 (f. 115) et p. 260 (f. 151).

Les symboles B_{2n} désignent des valeurs absolues des nombres de Bernoulli [1]). En voici quelques uns:

$$B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_8 = \frac{1}{30};$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}; \quad B_{12} = \frac{691}{2730}; \quad B_{14} = \frac{7}{6}; \quad B_{16} = \frac{3617}{710}.$$

Pour obtenir des développements des séries suivantes, nous intégrons les deux parties de l'équation (38) dans l'intervalle de 0 à φ $(0 < \varphi < \pi)$. En tenant compte de la formule $\lim_{\varphi=0} (\varphi \ln \varphi) = 0$, nous trouverons:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^2} = -\varphi \ln \varphi + \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}\, \varphi^{2n+1}}{2n\,(2n+1)!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38a)$$

En continuant ce procédé, nous recevrons successivement:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^3} = s_3 + \frac{\varphi^2}{2!} \ln \varphi - \frac{3\varphi^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}\, \varphi^{2n+2}}{2n\,(2n+2)!}; \quad \ldots \ldots \quad (38b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^4} = s_3\, \varphi + \frac{\varphi^3}{3!} \ln \varphi - \frac{11\varphi^3}{36} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}\, \varphi^{2n+3}}{2n\,(2n+3)!}; \quad \ldots \ldots \quad (38c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^5} = s_5 - \frac{s_3\, \varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} \ln \varphi + \frac{25\varphi^4}{288} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}\, \varphi^{2n+4}}{2n\,(2n+4)!}; \quad \ldots \ldots \quad (38d)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^6} = s_5\, \varphi - \frac{s_3\, \varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} \ln \varphi + \frac{137\varphi^5}{7200} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}\, \varphi^{2n+5}}{2n\,(2n+5)!}; \quad \ldots \quad (38e)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^7} = s_7 - \frac{s_5\, \varphi^2}{2!} + \frac{s_3\, \varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} \ln \varphi - \frac{147\varphi^6}{43200} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}\, \varphi^{2n+6}}{2n\,(2n+6)!}; \quad \ldots \quad (38f)$$

les symboles s désignent ici les sommes des séries numériques bien connues:

$$s_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}20205690; \quad s_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} = 1{,}03692776; \quad s_7 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} = 1{,}00834928 \quad . \quad . \quad (39)$$

Pour effectuer le calcul à l'aide de formules (38) il faut prendre en considération un nombre de termes d'autant plus grand que la valeur de φ est plus approchée de π. C'est pourquoi nous déduirons pour les séries considérées encore d'autres développements dont la convergence est la plus rapide particulièrement pour les valeurs de φ voisines de π.

---

[1]) Ibidem, p. 182.

Dans ce but nous utiliserons de nouveau la formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -\ln 2 - \ln\cos\frac{\pi-\varphi}{2},$$

qui, à l'aide de l'identité:

$$-\ln\cos u = \int_0^u \operatorname{tg} u\, du$$

et du développement connu [1]):

$$\operatorname{tg} u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} u^{2n-1},$$

prendra la forme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \cdot \frac{B_{2n}}{2n} \cdot \frac{[2(\pi-\varphi)]^{2n}}{(2n)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

De là nous trouverons par intégration successive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^2} = 2(\pi-\varphi) \cdot \frac{\ln 2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{B_{2n}}{2n} \cdot \frac{[2(\pi-\varphi)]^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad . \quad . \quad . \quad (40a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^3} = -\frac{2^2-1}{2^2} s_3 + \frac{[2(\pi-\varphi)]^2}{2!} \cdot \frac{\ln 2}{2^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n+2}} \cdot \frac{B_{2n}}{2n} \frac{[2(\pi-\varphi)]^{2n+2}}{(2n+2)!}; \quad . \quad (40b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^4} = \frac{2^2-1}{2^3} s_3 \cdot 2(\pi-\varphi) - \frac{[2(\pi-\varphi)]^3}{3!} \cdot \frac{\ln 2}{2^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n+3}} \cdot \frac{B_{2n}}{2n} \cdot \frac{[2(\pi-\varphi)]^{2n+3}}{(2n+3)!}; \quad (40c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^5} = -\frac{2^4-1}{2^4} s_5 + \frac{2^2-1}{2^4} s_3 \frac{[2(\pi-\varphi)]^2}{2!} -$$

$$-\frac{[2(\pi-\varphi)]^4}{4!} \cdot \frac{\ln 2}{2^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n+4}} \cdot \frac{B_{2n}}{2n} \cdot \frac{[2(\pi-\varphi)]^{2n+4}}{(2n+4)!}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40d)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^6} = \frac{2^4-1}{2^5} s_5 \cdot 2(\pi-\varphi) - \frac{2^2-1}{2^5} s_3 \frac{[2(\pi-\varphi)]^3}{3!} +$$

$$+\frac{[2(\pi-\varphi)]^5}{5!} \cdot \frac{\ln 2}{2^5} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n+5}} \cdot \frac{B_{2n}}{2n} \cdot \frac{[2(\pi-\varphi)]^{2n+5}}{(2n+5)!}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40e)$$

---

[1]) Knopp, l. c., p. 417.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^7}=-\frac{2^6-1}{2^6}s_7+\frac{2^4-1}{2^6}s_5\frac{[2(\pi-\varphi)]^2}{2!}-\frac{2^2-1}{2^6}s_3\frac{[2(\pi-\varphi)]^4}{4!}+$$

$$+\frac{[2(\pi-\varphi)]^6}{6!}\cdot\frac{\ln 2}{2^6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}-1}{2^{2n+6}}\cdot\frac{B_{2n}}{2n}\cdot\frac{[2(\pi-\varphi)]^{2n+6}}{(2n+6)!}\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (40f)$$

En comparant les formules (38) et (40), nous remarquerons qu'il est avantageux d'employer les premières, lorsque $0<\vartheta<\frac{2\pi}{3}$, et les secondes — pour $\frac{2\pi}{3}<\vartheta<\pi$. Le calcul relatif au deuxième intervalle est facilité, car on peut profiter d'une partie de résultats obtenus déjà pour le premier intervalle.

La disposition du calcul s'explique par les remarques suivantes. Ce sont surtout les termes du genre $\frac{\varphi^n}{n!}$ qu'on trouve dans les développements de séries considérées quand $0<\varphi<\frac{2}{3}\pi$ et du genre $\frac{[2(\pi-\varphi)]^n}{n!}$ quand $\frac{2}{3}\pi<\varphi<\pi$; il est évident que le deuxième groupe ne constitue qu'une partie du premier. C'est pourquoi nous avons commencé par la préparation des tables de valeurs de $\frac{\varphi^n}{n!}$ pour φ de l'intervalle $0<\varphi<\frac{2}{3}\pi$. Il a fallu d'abord de fixer l'approximation qui doit être exigée de ces termes. Les séries (38) et (40) possèdent cette propriété que, si on y néglige tous les termes à partir d'un quelconque, l'erreur commise est plus petite que la valeur du dernier terme retenu. En effet, il est facile de démontrer, en considérant l'inégalité [1]:

$$B_{2n}<2\,\frac{2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}},$$

que la convergence des séries (38) et (40) est toujours plus rapide que celle de la progression géometrique de raison $^1/_9$ qui possède évidemment la propriété mentionnée (en vertu de la formule: $u+\frac{u}{9}+\frac{u}{9^2}+\cdots\cdots=u+\frac{u}{8}$).

Il faut remarquer encore que le nombre de termes retenus dans les développements (38) et (40) n'a dépassé nulle part dix; donc il est clair qu'il a suffi de prendre chaque membre avec 8 décimales pour obtenir les tables à 7 décimales. Ces termes étant des produits de certains coefficients par les expressions $\frac{\varphi^n}{n!}$, l'approximation de ces dernières doit dépendre de la valeur des coefficients. Comme ces coefficients sont tous inférieurs à dix, il suffit — même dans le cas le moins favorable — de calculer $\frac{\varphi^n}{n!}$ avec 9 décimales.

Voici l'ordre des calculs. Nous avons trouvé d'abord les valeurs cherchées de φ avec 9 décimales. En les multipliant par $\frac{\varphi}{2}$, nous avons obtenu $\frac{\varphi^2}{2!}$ avec presque la même exactitude, puisque le multiplicateur $\frac{\varphi}{2}$ répond à l'inégalité: $0<\frac{\varphi}{2}\leqslant\frac{\pi}{3}=1{,}047\ldots\ldots$ De la même manière nous avons calculé successivement les expressions: $\frac{\varphi^3}{3!}$ etc. Chaque colonne de termes $\frac{\varphi^n}{n!}$ ainsi obtenus a été vérifiée par sommation — la somme a dû tomber d'accord avec ce qu'on a obtenu à l'aide de la formule:

---

[1]) Knopp, l. c., p. 239.

$$\sum_{p=0}^{120} \frac{\left(p \frac{\pi}{180}\right)^n}{n\,!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^n \sum_{p=0}^{120} p^n \text{ [1]}.$$

Nous avons déterminé d'une façon analogue le degré d'exactitude avec lequel il a fallu calculer les autres termes des développements considérés.

La vérification finale des résultats définitifs s'appuie sur la propriété suivante des séries successivement écrites:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\varphi}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,\varphi}{n^2} \ldots\ldots\ldots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,\varphi}{n^8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\varphi}{n^9};$$

chaque série précédente est la dérivée de la suivante par rapport à φ (à signe près). Considérons maintenant le diagramme d'une quelconque de ces séries, par exemple $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\varphi}{n^3}$, en fonction de φ. Soient B_1 et B_2 deux points du diagramme correspondant à deux valeurs voisines de φ (dont la différence est égale à $\frac{\pi}{180}$). D'après la fig. 4 nous écrirons:

$$\text{aire } A_1\,B_1\,M\,B_2\,A_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\varphi}{n^3}\, d\,\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,\varphi_2}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4}; \quad . \; . \; . \quad (41)$$

$$\text{aire } A_1\,B_1\,N\,B_2\,A_2 = \frac{\pi}{360} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\varphi_2}{n^3} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

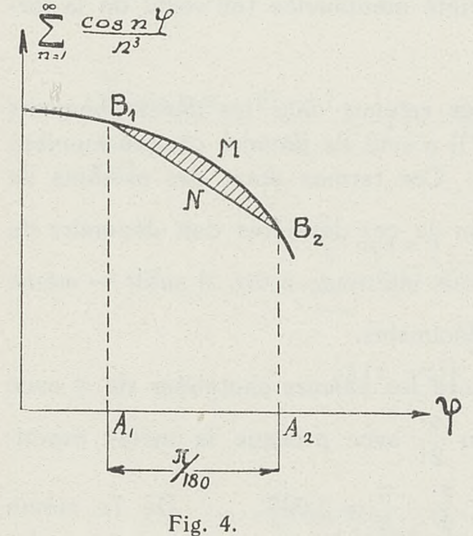


Fig. 4.

Ainsi, toutes les deux aires considerées s'expriment par les sommes des séries calculées de deux ordres consécutifs. Leur différence donne la valeur de l'aire du petit segment curviligne (la surface hachurée sur la fig. 4) qui s'exprime donc aussi par les sommes considérées. Si on trace maintenant le diagramme de ces petites aires en fonction de φ, la courbe obtenue doit être régulière. Au contraire — chaque irrégularité dans ce diagramme indique une faute dans le calcul. Il faut remarquer ici que l'erreur commise dans les sommes de l'ordre relativement supérieur (dans l'exemple considéré — form. 41 — $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,\varphi}{n^4}$) se manifeste dans sa valeur véritable, tandis que l'erreur dans les sommes de l'ordre inférieur $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\varphi}{n^3}\right.$ dans la form. 42) est diminuée par ce procédé, dans le rap-

---

[1]) Les valeurs de ces sommes peuvent être calculées successivement à l'aide de la formule d'Euler. Voir: H. Laurent, Traité d'Analyse, Paris 1888, t. III, p. 424.

port $\frac{\pi}{180}$. Ainsi, ce procédé ne vérifie que les sommes de l'ordre supérieur. C'est pourquoi, en désirant de contrôler avec la même exactitude les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^2}$, nous avons été obligés de calculer *ad hoc* les tables des sommes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left(2 \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Les tables se trouvent à la fin de ce travail.

§ 5.

Nous allons considérer maintenant des profils dont les ordonnées s'expriment toutes par un seul polynome en ϑ. Ce seront les profils „à un arc", pour lesquels on aura $\lambda = \frac{1}{2}$ selon la définition de λ, donnée à la page 7.

Comme la fonction y doit satisfaire aux équations bien connues:

$$y_{\vartheta = \mp\pi + \alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{a\, d\vartheta}\right)_{\vartheta = \mp\pi + \alpha} = 0,$$

elle doit être de la forme:

$$\frac{y}{a} = \frac{k}{T_{max}}\, t^2 (t-1)^2 f(t), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

où:

$$t = \frac{\vartheta + \pi - \alpha}{2\pi} \quad \text{ou bien} \quad t = \frac{\Theta + \pi - \alpha}{2\pi}, \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

$f(t)$ désigne un polynome arbitraire en t;

T_{max} est le maximum de l'expression $T = t^2 (t-1)^2 f(t)$ (par conséquent $k = \frac{y_{max}}{a}$, conformément aux notations établies dans le § 2).

En remplaçant dans la formule générale (13) $\frac{y}{a}$ par l'expression (43), nous obtenons:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{2k}{T_{max}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 t^2 (t-1)^2 f(t) \sin n(\vartheta + \pi - \alpha - 2\pi t)\, dt.$$

Il faut effectuer ici l'intégration à l'aide de la formule (35a). Ainsi, en substituant les limites d'intégration et en introduisant les abréviations:

1) $\varphi_1 = \vartheta \mp \pi - \alpha$,

2) f_1, f_0, f_1', f_0' etc. au lieu de $f(1), f(0), f'(1), f'(0)$ etc.,

3) $\sum$ au lieu de $\sum_{n=1}^{\infty}$,

on obtiendra:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{k}{2\pi^3 T_{max}} \Big\{ -(f_1 - f_0)\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^3} - \frac{3}{2\pi}\left[2(f_1+f_0)+f_1'-f_0'\right]\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^4} +$$

$$+\frac{3}{2\pi^2}\left[2(f_1-f_0)+4(f_1'+f_0')+f_1''-f_0''\right]\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^5}+$$

$$+\frac{5}{4\pi^3}\left[6(f_1'-f_0')+6(f_1''+f_0'')+f_1'''-f_0'''\right]\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^6}-$$

$$-\frac{15}{16\pi^4}\left[12(f_1''-f_0'')+8(f_1'''+f_0''')+f_1^{IV}-f_0^{IV}\right]\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^7}-$$

$$-\frac{21}{32\pi^5}\left[20(f_1'''-f_0''')+10(f_1^{IV}+f_0^{IV})+f_1^{V}-f_0^{V}\right]\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^8}+$$

$$+\frac{7}{16\pi^6}\left[30(f_1^{IV}-f_0^{IV})+12(f_1^{V}+f_0^{V})+f_1^{VI}-f_0^{VI}\right]\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^9}+$$

$$+\frac{9}{32\pi^7}\left[42(f_1^{V}-f_0^{V})+14(f_1^{VI}+f_0^{VI})+f_1^{VII}-f_0^{VII}\right]\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^{10}}-\;\ldots\Big\}. \qquad (45)$$

Comme nos tables ne contiennent pas des sommes de l'ordre supérieur à 9-ième, nous ne pouvons utiliser le polynome $f(t)$ que du 5-me degré au maximum (on s'en convaincra en examinant la formule 45).

Nous allons indiquer quelques exemples en nous bornant pourtant à donner des formules pour les coordonnées y et x et le coefficient k; se dernier est à déterminer, comme d'ordinaire, à l'aide de l'équation (5'). Dans la plupart des exemples nous donnerons encore la valeur de l'expression:

$$T_{max} = t_m^2\,(t_m-1)^2\,f(t_m), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (46)$$

où t_m est une racine de l'équation:

$$\frac{1}{t(t-1)}\cdot\frac{dT}{dt} = 0, \quad \text{c. à-d.} \quad 2\,(2t \quad 1)\,f(t) + t\,(t-1)\,f'(t) = 0, \qquad \ldots\ldots \qquad (47)$$

et satisfait à l'inégalité: $0 \leqslant t_m \leqslant 1$.

1-o. $f(t)=1$; $\quad \dfrac{y}{a} = 16\,k\,t^2\,(t-1)^2$; $\quad \dfrac{x}{a} = 2\cos\vartheta - \dfrac{48\,k}{\pi^4}\sum\dfrac{\sin n\varphi_1}{n^4}$; $\quad k = \dfrac{\pi^4 \sin\alpha}{24\,s_3}$ [1]).

2-o. $f(t)=t$; $\quad \dfrac{y}{a} = \dfrac{3125}{108}\,k\,t^3\,(t-1)^2$;

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{3125}{216\,\pi^3}\,k\left\{-\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^3} - \frac{3}{\pi}\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^4} + \frac{15}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^5}\right\}; \quad k = \frac{144\,\pi^4\sin\alpha}{3125\,s_3}.$$

3-o. $f(t)=t^2$; $\quad \dfrac{y}{a} = \dfrac{729}{16}\,k\,t^4\,(t-1)^2$;

---

[1]) Les valeurs numériques des expressions s se trouvent à la page 17 (form. 39).

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{729}{32\,\pi^3}\,k\left\{-\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} - \frac{6}{\pi}\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4} + \frac{15}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5} + \frac{45}{\pi^3}\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^6}\right\};$$

$$k = \frac{64\,\pi^6 \sin\alpha}{2187\,(2\,\pi^2 s_3 - 15\,s_5)}.$$

4-o. $f(t) = t - 1\,;\quad \frac{y}{a} = -\frac{3125}{108}\,k\,t^2\,(t-1)^3\,;$

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{3125}{216\,\pi^3}\,k\left\{\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} - \frac{3}{\pi}\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4} - \frac{15}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5}\right\};\quad k = \frac{144\,\pi^4\sin\alpha}{3125\,s_3}.$$

5-o. $f(t) = (t-1)^2\,;\quad \frac{y}{a} = \frac{729}{16}\,k\,t^2\,(t-1)^4\,;$

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{729}{32\,\pi^3}\,k\left\{\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} - \frac{6}{\pi}\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4} - \frac{15}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5} + \frac{45}{\pi^3}\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^6}\right\};$$

$$k = \frac{64\,\pi^6\sin\alpha}{2187\,(2\,\pi^2 s_3 - 15\,s_5)}.$$

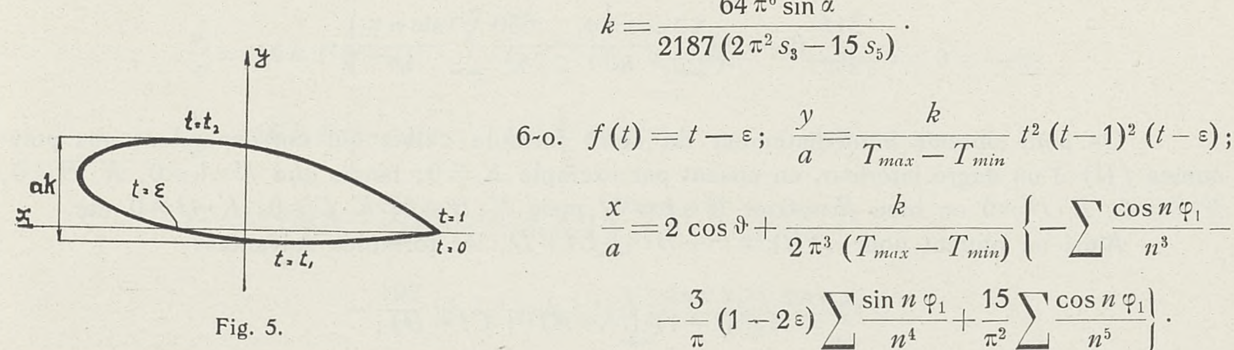


Fig. 5.

6-o. $f(t) = t - \varepsilon\,;\quad \frac{y}{a} = \frac{k}{T_{max} - T_{min}}\,t^2\,(t-1)^2\,(t-\varepsilon)\,;$

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{k}{2\,\pi^3\,(T_{max} - T_{min})}\left\{-\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} - \frac{3}{\pi}\,(1 - 2\,\varepsilon)\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4} + \frac{15}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5}\right\}.$$

Les profils 1-o — 5-o sont situés entièrement d'un seul côté de l'axe x; au contraire, les profils 6-o coupent l'axe x au point $t = \varepsilon$, si le paramètre ε est compris dans l'intervalle (0; 1). Le coefficient k désigne, dans ce dernier cas, la somme:

$$k = \left|\frac{y_{max}}{a}\right| + \left|\frac{y_{min}}{a}\right|,$$

conformément à la fig. 5. Quant aux valeurs T_{min} et T_{max}, on les obtient en introduisant successivement dans l'expression $T = t^2\,(t-1)^2\,(t-\varepsilon)$ les deux racines de l'équation (47), c'est-à-dire:

$$t_{1,2} = \frac{3 + 4\,\varepsilon \mp \sqrt{9 - 16\,\varepsilon + 16\,\varepsilon^2}}{10}.$$

7-o. $f(t) = (t-\varepsilon)^2\,;\quad \frac{y}{a} = \frac{k}{T_{max}}\,t^2\,(t-1)^2\,(t-\varepsilon)^2\,;$

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{k}{2\,\pi^3\,T_{max}}\left\{-(1 - 2\,\varepsilon)\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} - \frac{6}{\pi}\,(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4} + \frac{15}{\pi^2}\,(1 - 2\,\varepsilon)\sum\frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5} + \frac{45}{\pi^3}\sum\frac{\sin n\,\varphi_1}{n^6}\right\}.$$

Fig. 6.

Cette fois, le profil possède une concavité dans sa partie inférieure (fig. 6). T_m correspond — comme d'ordinaire — à la plus grande racine de l'équation (47), c'est-à-dire:

$$t = t_2 = \frac{1 + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon + \varepsilon^2}}{3}.$$

8-o. Nous indiquerons encore un groupe de profils à un arc qui peuvent subir des grandes variations de forme grâce à un nombre suffisant des coefficients arbitraires. Soit donc:

$$f(t) = t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D; \quad \frac{y}{a} = KT = \frac{k}{T_{max}} t^2 (t-1)^2 (t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D);$$

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{K}{2\pi^3}\Big\{-(1+A+B+C)\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^3} - \frac{3}{2\pi}(6+5A+4B+2C+4D)\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^4} +$$

$$+ \frac{15}{\pi^2}(3+2A+B+C)\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^5} + \frac{15}{2\pi^3}(20+9A+6B)\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^6} -$$

$$- \frac{315}{2\pi^4}(2+A)\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^7} - \frac{630}{\pi^5}\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^8}\Big\}.$$

On peut obtenir immédiatement de cette formule celles qui correspondent aux polynomes $f(t)$ d'un degré inférieur, en posant par exemple $K = 0$, tandis que $K \cdot A \neq 0$, $K \cdot B \neq 0$, $K \cdot C \neq 0$, $K \cdot D \neq 0$ ou bien $K = 0$ et $K \cdot A = 0$, mais $K \cdot B \neq 0$; $K \cdot C \neq 0$; $K \cdot D \neq 0$ etc.

Ainsi on obtient pour: $f(t) = t^3 + Bt^2 + Ct + D$, les formules suivantes:

$$\frac{y}{a} = Kt^2(t-1)^2(t^3 + Bt^2 + Ct + D);$$

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{K}{2\pi^3}\Big\{-(1+B+C)\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^3} - \frac{3}{2\pi}(5+4B+2C+4D)\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^4} +$$

$$+ \frac{15}{\pi^2}(2+B+C)\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^5} + \frac{45}{2\pi^3}(3+2B)\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^6} - \frac{315}{2\pi^4}\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^7}\Big\}.$$

§ 6.

Nous allons étudier maintenant les profils à deux arcs, déterminés de la façon suivante (fig. 3): le premier arc correspond à $-\pi + \alpha \leqslant \vartheta \leqslant -\beta$ et le second à $-\beta \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \alpha$; le point $\vartheta = -\beta$ du profil circulaire correspond au point du contact du profil transformé avec l'axe x. Nous aurons ainsi:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{\pi - \alpha - \beta}; \qquad \lambda_2 = \frac{\pi}{\pi + \alpha + \beta}.$$

1-o. Considérons d'abord un cas singulier où le premier arc est un segment de l'axe des x. Soit donc:

$$\frac{y_1}{a} = 0 \qquad \text{pour} \qquad -\pi + \alpha \leqslant \vartheta \leqslant -\beta,$$

$$\frac{y_2}{a} = 16\,k_2\,t^2(t-1)^2 \qquad \text{„} \qquad -\beta \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \alpha,$$

où: $t=\frac{\lambda_2}{\pi}(\vartheta+\beta)$. Les abscisses s'exprimeront, en vertu de (13), sous la forme:

$$\frac{x}{a}=2\cos\vartheta+\frac{16\,k}{\lambda_2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^2(t-1)^2\sin n\left(\vartheta+\beta-\frac{\pi t}{\lambda_2}\right)dt.$$

En appliquant la formule (35a), nous trouverons:

$$\frac{x}{a}=2\cos\vartheta+\frac{32\,\lambda_2^2}{\pi^3}\,k\left\{-\sum\frac{\cos n\,\varphi_1-\cos n\,\varphi_2}{n^3}-\frac{6\,\lambda_2}{\pi}\sum\frac{\sin n\,\varphi_1+\sin n\,\varphi_2}{n^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{12\,\lambda_2^2}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\,\varphi_1-\cos n\,\varphi_2}{n^5}\right\},$$

où: $\varphi_1=\vartheta\mp\pi+\alpha$; $\varphi_2=\vartheta+\beta$.

2-o. Profil avec une concavité:

$$\frac{y_1}{a}=16\,k_1\,t^2(t-1)^2;\qquad t=\frac{\lambda_1}{\pi}(\vartheta+\pi-\alpha);\qquad -\pi+\alpha\leqslant\vartheta\leqslant-\beta;$$

$$\frac{y_2}{a}=16\,k_2\,t^2(t-1)^2;\qquad t=\frac{\lambda_2}{\pi}(\vartheta+\beta);\qquad -\beta\leqslant\vartheta\leqslant\pi+\alpha;$$

$$\frac{x}{a}=2\cos\vartheta-\frac{32}{\pi^3}(k_2\,\lambda_2{}^2-k_1\,\lambda_1{}^2)\sum\frac{\cos n\,\varphi_1-\cos n\,\varphi_2}{n^3}-$$
$$-\frac{192}{\pi^4}(k_2\,\lambda_2{}^3+k_1\,\lambda_1{}^3)\sum\frac{\sin n\,\varphi_1+\sin n\,\varphi_2}{n^4}+$$
$$+\frac{384}{\pi^5}(k_2\,\lambda_2{}^4-k_1\,\lambda_1{}^4)\sum\frac{\cos n\,\varphi_1-\cos n\,\varphi_2}{n^5}.$$

Ici ak_1 désigne l'ordonnée maximum de la partie concave du profil, et ak_2 — celle de la partie convexe.

3-o. $$\frac{y_1}{a}=64\,k_1\,t^3(1-t)^3;\qquad t=\frac{\lambda_1}{\pi}(\vartheta+\pi-\alpha);\qquad -\pi+\alpha\leqslant\vartheta\leqslant-\beta;$$

$$\frac{y_2}{a}=64\,k_2\,t^3(1-t)^3;\qquad t=\frac{\lambda_2}{\pi}(\vartheta+\beta);\qquad -\beta\leqslant\vartheta\leqslant\pi+\alpha;$$

$$\frac{x}{a}=2\cos\vartheta+\frac{384}{\pi^4}(k_2\,\lambda_2{}^3+k_1\,\lambda_1{}^3)\sum\frac{\sin n\,\varphi_1+\sin n\,\varphi_2}{n^4}-$$
$$-\frac{4608}{\pi^5}(k_2\,\lambda_2{}^4-k_1\,\lambda_1{}^4)\sum\frac{\cos n\,\varphi_1-\cos n\,\varphi_2}{n^5}-$$
$$-\frac{23040}{\pi^6}(k_2\,\lambda_2{}^5+k_1\,\lambda_1{}^5)\sum\frac{\sin n\,\varphi_1+\sin n\,\varphi_2}{n^6}+$$
$$+\frac{46080}{\pi^7}(k_2\,\lambda_2{}^6-k_1\,\lambda_1{}^6)\sum\frac{\cos n\,\varphi_1-\cos n\,\varphi_2}{n^7}.$$

4-o. Considérons maintenant un profil à deux arcs dont la partie antérieure coupe l'axe des x sous un angle quelconque (fig. 7). C'est au point d'intersection où se rencontrent les deux arcs ($\vartheta=-\beta$). Nous posons:

$$\frac{y_1}{a} = \frac{k_1}{T_{min}} t^2 (t-1)(t+\varepsilon_1); \quad t = \frac{\lambda_1}{\pi}(\vartheta + \pi - \alpha); \quad -\pi + \alpha \leqslant \vartheta \leqslant -\beta;$$

$$T_{min} = t_1^2 (t_1 - 1)(t_1 + \varepsilon_1); \quad t_1 = \frac{3(1-\varepsilon_1) + \sqrt{9 + 14\varepsilon_1 + 9\varepsilon_1^2}}{8};$$

$$\frac{y_2}{a} = \frac{k_2}{T_{max}} t (t-1)^2 (t+\varepsilon_2); \quad t = \frac{\lambda_2}{\pi}(\vartheta + \beta); \quad -\beta \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \alpha;$$

$$T_{max} = t_2 (t_2 - 1)^2 (t_2 + \varepsilon_2); \quad t_2 = \frac{2 - 3\varepsilon_2 + \sqrt{4 + 4\varepsilon_2 + 9\varepsilon_2^2}}{8};$$

il est indispensable d'ajouter encore la condition: $\frac{k_1}{T_{min}} \lambda_1 (1 + \varepsilon_1) = \frac{k_2}{T_{max}} \lambda_2 \varepsilon_2$, qui exprime que la première dérivée de y par rapport à ϑ ne cesse pas d'être continue au point $\vartheta = -\beta$.

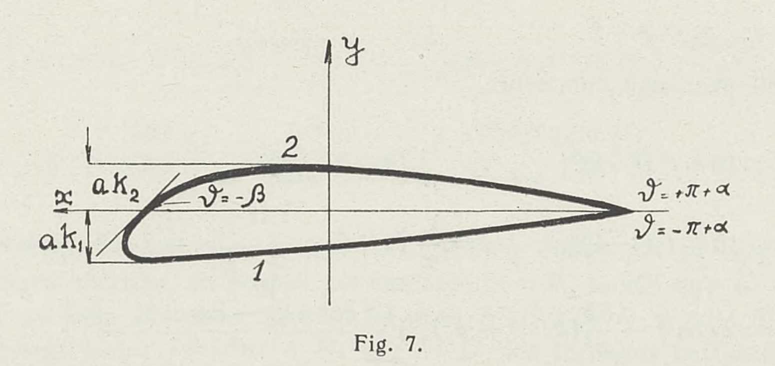


Fig. 7.

En appliquant la formule (34a) nous obtenons:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta - 2\frac{k_1 \lambda_1^2}{\pi^3 T_{min}} \left\{ \left[\varepsilon_1 \sum \frac{\cos n\varphi_1}{n^3} + (3 + 2\varepsilon_1) \sum \frac{\cos n\varphi_2}{n^3} \right] + \right.$$

$$+ 3\frac{\lambda_1}{\pi} \left[(1 - \varepsilon_1) \sum \frac{\sin n\varphi_1}{n^4} + (3 + \varepsilon_1) \sum \frac{\sin n\varphi_2}{n^4} \right] + 12 \frac{\lambda_1^2}{\pi^2} \left. \left[\sum \frac{\cos n\varphi_1}{n^5} - \sum \frac{\cos n\varphi_2}{n^5} \right] \right\} +$$

$$+ 2\frac{k_2 \lambda_2^2}{\pi^3 T_{max}} \left\{ - \left[(1 + \varepsilon_2) \sum \frac{\cos n\varphi_1}{n^3} + (2\varepsilon_2 - 1) \sum \frac{\cos n\varphi_2}{n^3} \right] - \right.$$

$$- 3\frac{\lambda_2}{\pi} \left[(2 + \varepsilon_2) \sum \frac{\sin n\varphi_1}{n^4} + (2 - \varepsilon_2) \sum \frac{\sin n\varphi_2}{n^4} \right] + 12 \frac{\lambda_2^2}{\pi^2} \left. \left[\sum \frac{\cos n\varphi_1}{n^5} - \sum \frac{\cos n\varphi_2}{n^5} \right] \right\}.$$

Les coefficients k_1 et k_2 sont liés par la relation bien connue (5'): $\left(\frac{dx}{a\,d\vartheta}\right)_{\vartheta = \mp\pi + \alpha} = 0$.

5-o. Soit:

$$\frac{y_1}{a} = k t^2 (3 - 2t) + 3 p k t^2 (t - 1)^2; \quad t = \frac{\lambda_1}{\pi}(\vartheta + \pi - \alpha); \quad -\pi + \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \gamma;$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{\pi - \alpha + \gamma}; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$\frac{y_2}{a} = k - k t^2 (3 - 2t) - 3 q k t^2 (t - 1)^2; \quad t = \frac{\lambda_2}{\pi}(\vartheta - \gamma); \quad \gamma \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \alpha;$$

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{\pi + \alpha - \gamma}; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

d'où :

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{6k}{\pi^3}\left\{\left[\lambda_1^2(1+p) - \lambda_2^2(1-q)\right]\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^3} + \left[\lambda_1^2(1-p) - \lambda_2^2(1+q)\right]\sum\frac{\cos n\varphi_2}{n_3} - \right.$$

$$-2\frac{\lambda_1^3(1+3p)+\lambda_2^3(1-3q)}{\pi}\sum\frac{\sin n\varphi_1}{n^4} + 2\frac{\lambda_1^3(1-3p)+\lambda_2^3(1+3q)}{\pi}\sum\frac{\sin n\varphi_2}{n^4} -$$

$$\left. -12\frac{p\lambda_1^4+q\lambda_2^4}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\varphi_1}{n^5} + 12\frac{p\lambda_1^4+q\lambda_2^4}{\pi^2}\sum\frac{\cos n\varphi_2}{n^5}\right\},$$

où : $\qquad \varphi_1 = \vartheta \mp \pi - \alpha; \quad \varphi_2 = \vartheta - \gamma.$

Il est facile de vérifier que nous obtiendrons un profil dont la forme est représentée approximativement par la fig. 8. Le point où se rencontrent les deux arcs ($\vartheta = \gamma$) correspondra à l'ordonnée maximum. La tangente à ce point sera parallèle à l'axe x.

Les paramètres arbitraires p et q ont pour but la possibilité de satisfaire à d'autres conditions.

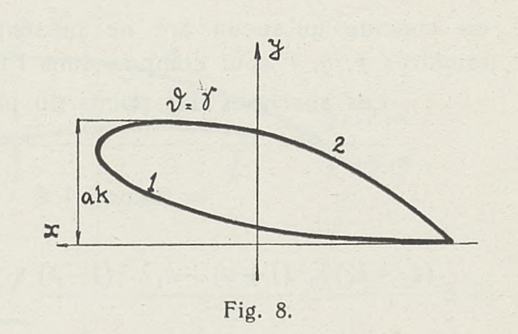


Fig. 8.

§ 7.

Nous ne donnerons qu'un exemple du profil à trois arcs (fig. 9).

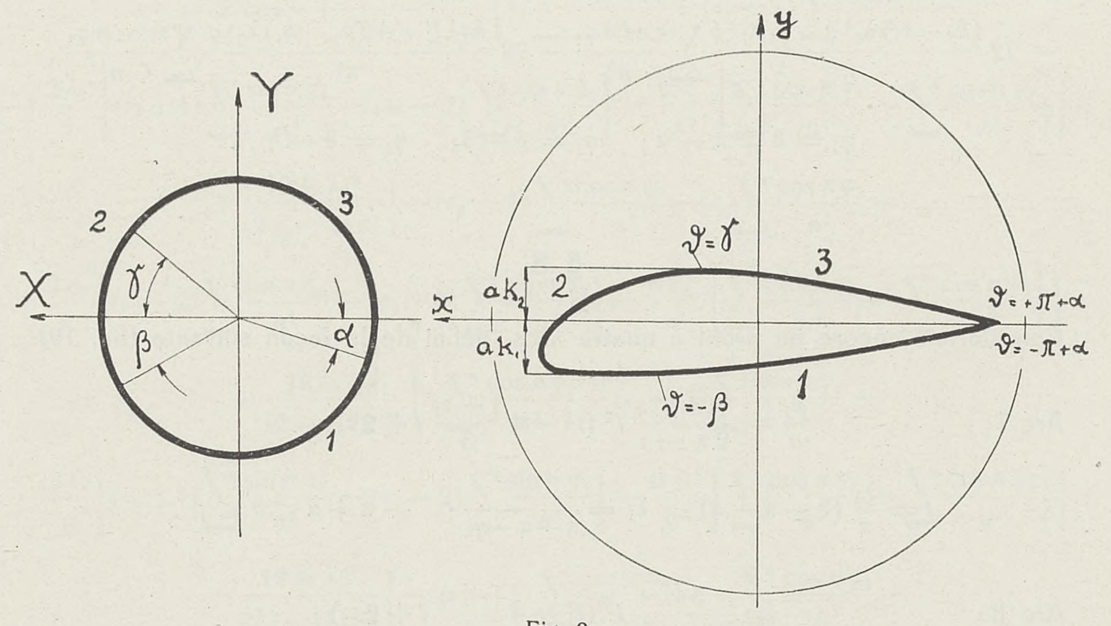


Fig. 9.

$$\frac{y_1}{a} = k_1 t^2\left[3 - 2t + 3p(t-1)^2\right]; \quad t = \frac{\lambda_1}{\pi}(\vartheta + \pi - \alpha); \quad -\pi + \alpha \leqslant \vartheta \leqslant -\beta;$$

$$\frac{y_2}{a} = k_1 + (k_2 - k_1)\, t^2\left[3 - 2t + 3q(t-1)^2\right]; \quad t = \frac{\lambda_2}{\pi}(\vartheta + \beta); \quad -\beta \leqslant \vartheta \leqslant \gamma;$$

$$\frac{y_3}{a} = k_2 - k_2 t^2\left[3 - 2t - 3r(t-1)^2\right]; \quad t = \frac{\lambda_3}{\pi}(\vartheta - \gamma); \quad \gamma \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \alpha;$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{\pi - \alpha - \beta}; \qquad \lambda_2 = \frac{\pi}{\beta + \gamma}; \qquad \lambda_3 = \frac{\pi}{\pi + \alpha - \gamma}.$$

En observant les dérivées:

$$\frac{dy_1}{a\,dt} = 6\,k_1\,t\,(t-1)\,(2\,p\,t - p - 1)\,,$$

$$\frac{dy_2}{a\,dt} = 6\,(k_2 - k_1)\,t\,(t-1)\,(2\,q\,t - q - 1)\,, \quad \frac{dy_3}{a\,dt} = 6\,k_2\,t\,(t-1)\,(2\,r\,t - r + 1);$$

on conclue qu'aucun arc ne présente de maxima ou de minima supplémentaires, si les paramètres p, q, r sont compris dans l'intervalle $(-1;\, +1)$.

Les abscisses des points du profil sont exprimées par la formule:

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + 6\,\frac{k_1\,\lambda_1^2\,(1+p) - k_2\,\lambda_3^2\,(1+r)}{\pi^3} \sum \frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} +$$

$$+ 6\,\frac{(k_2 - k_1)\,\lambda_2^2\,(1+q) + k_1\,\lambda_1^2\,(1-p)}{\pi^3} \sum \frac{\cos n\,\varphi_2}{n^3} - 6\,\frac{k_2\,\lambda_3^2\,(1-r) - (k_2 - k_1)\,\lambda_2^2\,(1-q)}{\pi^3} \sum \frac{\cos n\,\varphi_3}{n^3} -$$

$$-12\,\frac{k_1\,\lambda_1^3\,(1+3p) + k_2\,\lambda_3^3\,(1+3r)}{\pi^4} \sum \frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4} - 12\,\frac{(k_2 - k_1)\,\lambda_2^3\,(1+3q) - k_1\,\lambda_1^3\,(1-3p)}{\pi^4} \sum \frac{\sin n\,\varphi_2}{n^4} +$$

$$+ 12\,\frac{k_2\,\lambda_3^3\,(1-3r) + (k_2 - k_1)\,\lambda_2^3\,(1-3q)}{\pi^4} \sum \frac{\sin n\,\varphi_3}{n^4} - 72\,\frac{k_1\,\lambda_1^4\,p - k_2\,\lambda_3^4\,r}{\pi^5} \sum \frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5} -$$

$$- 72\,\frac{(k_2 - k_1)\,\lambda_2^4\,q - k_1\,\lambda_1^4\,p}{\pi^5} \sum \frac{\cos n\,\varphi_2}{n^5} - 72\,\frac{k_2\,\lambda_3^4\,r - (k_2 - k_1)\,\lambda_2^4\,q}{\pi^5} \sum \frac{\cos n\,\varphi_3}{n^5};$$

où:

$$\varphi_1 = \vartheta \mp \pi - \alpha\,; \qquad \varphi_2 = \vartheta + \beta; \qquad \varphi_3 = \vartheta - \gamma\,.$$

§ 8.

Considérons encore un profil à quatre arcs, défini de la façon suivante (fig. 10).

Arc I:

$$\frac{y_1}{a} = \frac{3\,k_i}{2\,\varepsilon_1 - 1}\,t^2\left(t^2 - 4\,\frac{1+\varepsilon_1}{3}\,t + 2\,\varepsilon_1\right);$$

$$t = \frac{\lambda_1}{\pi}\,(\vartheta - \pi - \alpha)\,; \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{\pi - \alpha - \gamma_i}\,; \quad -\pi + \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \gamma_i\,.$$

Arc II:

$$\frac{y_2}{a} = \frac{3\,k_i}{2\,\varepsilon_2 - 1}\,t^2\left(t^2 - 4\,\frac{1+\varepsilon_2}{3}\,t + 2\,\varepsilon_2\right);$$

$$t = -\frac{\lambda_2}{\pi}\,(\vartheta + \beta)\,; \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{\gamma_i - \beta}\,; \quad -\gamma_i \leqslant \vartheta \leqslant -\beta\,.$$

Arc III:

$$\frac{y_3}{a} = \frac{3\,k_s}{2\,\varepsilon_3 - 1}\,t^2\left(t^2 - 4\,\frac{1+\varepsilon_3}{3}\,t + 2\,\varepsilon_3\right);$$

$$t = \frac{\lambda_3}{\pi}\,(\vartheta + \beta)\,; \quad \lambda_3 = \frac{\pi}{\beta + \gamma_s}\,; \quad -\beta \leqslant \vartheta \leqslant \gamma_s\,.$$

Arc IV: $$\frac{y_4}{a} = \frac{3\,k_s}{2\,\varepsilon_4 - 1}\, t^2 \left(t^2 - 4\,\frac{1+\varepsilon_4}{3}\, t + 2\,\varepsilon_4\right);$$

$$t = -\frac{\lambda_4}{\pi}(\vartheta - \pi - \alpha)\,; \quad \lambda_4 = \frac{\pi}{\pi + \alpha - \gamma_s}\,; \quad \gamma_s \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \alpha\,.$$

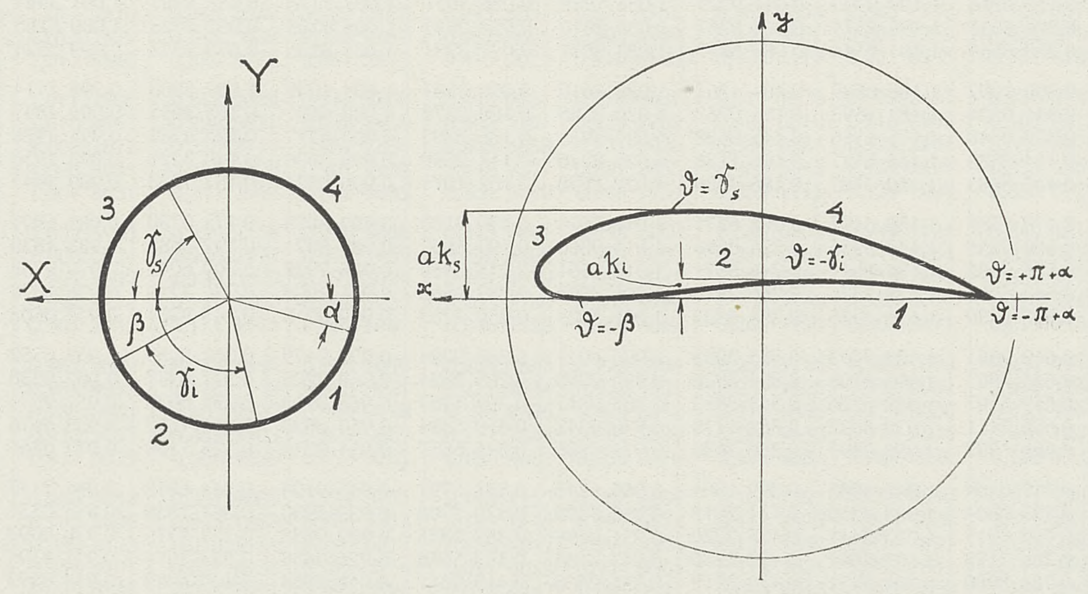


Fig. 10.

$$\frac{x}{a} = 2\cos\vartheta + \frac{12\,k_i\,\lambda_1^2}{(2\,\varepsilon_1 - 1)\,\pi^3}\Bigg\{\varepsilon_1 \sum \frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} + (\varepsilon_1 - 1)\sum \frac{\cos n\,\varphi_2}{n^3} -$$

$$-\frac{2\,\lambda_1}{\pi}\left[(\varepsilon_1 + 1)\sum \frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4} - (\varepsilon_1 - 2)\sum \frac{\sin n\,\varphi_2}{n^4}\right] - \frac{6\,\lambda_1^2}{\pi^2}\left[\sum \frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5} - \sum \frac{\cos n\,\varphi_2}{n^5}\right]\Bigg\} +$$

$$+ \frac{12\,k_i\,\lambda_2^2}{(2\,\varepsilon_2 - 1)\,\pi^3}\Bigg\{-(\varepsilon_2 - 1)\sum \frac{\cos n\,\varphi_2}{n^3} - \varepsilon_2 \sum \frac{\cos n\,\varphi_3}{n^3} +$$

$$+\frac{2\,\lambda_2}{\pi}\left[(\varepsilon_2 - 2)\sum \frac{\sin n\,\varphi_2}{n^4} - (\varepsilon_2 + 1)\sum \frac{\sin n\,\varphi_3}{n^4}\right] - \frac{6\,\lambda_2^2}{\pi^2}\left[\sum \frac{\cos n\,\varphi_2}{n^5} - \sum \frac{\cos n\,\varphi_3}{n^5}\right]\Bigg\} +$$

$$+ \frac{12\,k_s\,\lambda_3^2}{(2\,\varepsilon_3 - 1)\,\pi^3}\Bigg\{\varepsilon_3 \sum \frac{\cos n\,\varphi_3}{n^3} + (\varepsilon_3 - 1)\sum \frac{\cos n\,\varphi_4}{n^3} -$$

$$-\frac{2\,\lambda_3}{\pi}\left[(\varepsilon_3 + 1)\sum \frac{\sin n\,\varphi_3}{n^4} - (\varepsilon_3 - 2)\sum \frac{\sin n\,\varphi_4}{n^4}\right] - \frac{6\,\lambda_3^2}{\pi^2}\left[\sum \frac{\cos n\,\varphi_3}{n^5} - \sum \frac{\cos n\,\varphi_4}{n^5}\right]\Bigg\} +$$

$$+ \frac{12\,k_s\,\lambda_4^2}{(2\,\varepsilon_4 - 1)\,\pi^3}\Bigg\{-(\varepsilon_4 - 1)\sum \frac{\cos n\,\varphi_4}{n^3} - \varepsilon_4 \sum \frac{\cos n\,\varphi_1}{n^3} +$$

$$+\frac{2\,\lambda_4}{\pi}\left[(\varepsilon_4 - 2)\sum \frac{\sin n\,\varphi_4}{n^4} - (\varepsilon_4 + 1)\sum \frac{\sin n\,\varphi_1}{n^4}\right] - \frac{6\,\lambda_4}{\pi^2}\left[\sum \frac{\cos n\,\varphi_4}{n^5} - \sum \frac{\cos n\,\varphi_1}{n^5}\right]\Bigg\},$$

où: $$\varphi_1 = \vartheta \mp \pi - \alpha\,; \quad \varphi_2 = \vartheta + \gamma_i\,; \quad \varphi_3 = \vartheta + \beta\,; \quad \varphi_4 = \vartheta - \gamma_s\,.$$

ϑ^0	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^7}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^9}$	ϑ^0
0	0	1,202 0569	0	1,036 9278	0	1,008 3493	0	1,002 0084	0
1	0,088 1083	1,201 2119	0,020 9746	1,036 7447	0,018 0967	1,008 1914	0,017 5981	1,001 8548	1
2	0,152 0216	1,199 0990	0,041 9229	1,036 1958	0,036 1871	1,007 7176	0,035 1907	1,001 3941	2
3	0,206 8033	1,195 9574	0,062 8251	1,035 2816	0,054 2647	1,006 9283	0,052 7723	1,000 6265	3
4	0,255 6559	1,191 9144	0,083 6645	1,034 0031	0,072 3231	1,005 8235	0,070 3373	0,999 5521	4
5	0,300 1002	1,187 0589	0,104 4261	1,032 3616	0,090 3561	1,004 4039	0,087 8803	0,998 1714	5
6	0,341 0324	1,181 4593	0,125 0963	1,030 3585	0,108 3572	1,002 6697	0,105 3957	0,996 4847	6
7	0,379 0448	1,175 1716	0,145 6628	1,027 9955	0,126 3203	1,000 6217	0,122 8782	0,994 4926	7
8	0,414 5585	1,168 2427	0,166 1138	1,025 2746	0,144 2390	0,998 2606	0,140 3222	0,992 1956	8
9	0,447 8883	1,160 7135	0,186 4386	1,022 1978	0,162 1071	0,995 5871	0,157 7223	0,989 5947	9
10	0,479 2788	1,152 6197	0,206 6271	1,018 7674	0,179 9183	0,992 6023	0,175 0730	0,986 6904	10
11	0,508 9255	1,143 9936	0,226 6696	1,014 9860	0,197 6667	0,989 3071	0,192 3688	0,983 4838	11
12	0,536 9882	1,134 8641	0,246 5571	1,010 8561	0,215 3460	0,985 7028	0,209 6045	0,979 9758	12
13	0,563 6001	1,125 2576	0,266 2810	1,006 3805	0,232 9502	0,981 7906	0,226 7746	0,976 1676	13
14	0,588 8739	1,115 1985	0,285 8333	1,001 5621	0,250 4733	0,977 5718	0,243 8737	0,972 0603	14
15	0,612 9061	1,104 7093	0,305 2063	0,996 4041	0,267 9094	0,973 0479	0,260 8965	0,967 6552	15
16	0,635 7807	1,093 8108	0,324 3926	0,990 9095	0,285 2524	0,968 2205	0,277 8377	0,962 9538	16
17	0,657 5707	1,082 5226	0,343 3852	0,985 0817	0,302 4967	0,963 0913	0,294 6920	0,957 9574	17
18	0,678 3411	1,070 8632	0,362 1776	0,978 9242	0,319 6364	0,957 6620	0,311 4542	0,952 6676	18
19	0,698 1493	1,058 8497	0,380 7633	0,972 4406	0,336 6657	0,951 9345	0,328 1190	0,947 0861	19
20	0,717 0469	1,046 4985	0,399 1364	0,965 6343	0,353 5791	0,945 9108	0,344 6812	0,941 2147	20
21	0,735 0804	1,033 8250	0,417 2912	0,958 5093	0,370 3708	0,939 5930	0,361 1358	0,935 0551	21
22	0,752 2917	1,020 8441	0,435 2220	0,951 0694	0,387 0355	0,932 9832	0,377 4775	0,928 6093	22
23	0,768 7193	1,007 5697	0,452 9236	0,943 3186	0,403 5676	0,926 0837	0,393 7014	0,921 8794	23
24	0,784 3980	0,994 0151	0,470 3912	0,935 2608	0,419 9617	0,918 8968	0,409 8023	0,914 8673	24
25	0,799 3599	0,980 1932	0,487 6198	0,926 9002	0,436 2126	0,911 4251	0,425 7753	0,907 5753	25
26	0,813 6346	0,966 1162	0,504 6049	0,918 2411	0,452 3149	0,903 6710	0,441 6154	0,900 0057	26
27	0,827 2494	0,951 7958	0,521 3421	0,909 2876	0,468 2636	0 895 6372	0,457 3177	0,892 1608	27
28	0,840 2297	0,937 2434	0,537 8274	0,900 0443	0,484 0534	0,887 3264	0,472 8774	0,884 0431	28
29	0,852 5989	0,922 4698	0,554 0568	0,890 5154	0,499 6794	0,878 7415	0,488 2896	0,875 6552	29
30	0,864 3791	0,907 4855	0,570 0265	0,880 7055	0,515 1366	0,869 8853	0,503 5497	0,866 9995	30
31	0,875 5908	0,892 3006	0,585 7329	0,870 6192	0,530 4202	0,860 7609	0,518 6528	0,858 0789	31
32	0,886 2532	0,876 9248	0,601 1725	0,860 2611	0,545 5254	0,851 3712	0,533 5943	0,848 8960	32
33	0,896 3843	0,861 3676	0,616 3423	0,849 6359	0,560 4474	0,841 7195	0,548 3697	0,839 4539	33
34	0,906 0011	0,845 6381	0,631 2390	0,838 7483	0,575 1817	0,831 8090	0,562 9744	0,829 7553	34
35	0,915 1197	0,829 7451	0,645 8597	0,827 6031	0,589 7238	0,821 6430	0,577 4039	0,819 8034	35
36	0,923 7552	0,813 6972	0,660 2016	0,816 2052	0,604 0691	0,811 2249	0,591 6537	0,809 6012	36
37	0,931 9218	0,797 5027	0,674 2622	0,804 5594	0,618 2132	0,800 5582	0,605 7195	0,799 1518	37
38	0,939 6332	0,781 1696	0,688 0389	0,792 6707	0,632 1521	0,789 6464	0,619 5970	0,788 4587	38
39	0,946 9022	0,764 7059	0,701 5294	0,780 5440	0,645 8813	0,778 4931	0,633 2819	0,777 5249	39
40	0,953 7410	0,748 1190	0,714 7315	0,768 1843	0,659 3968	0,767 1021	0,646 7701	0,766 3541	40
41	0,960 1613	0,731 4165	0,727 6430	0,755 5968	0,672 6947	0,755 4771	0,660 0575	0,754 9496	41
42	0,966 1743	0,714 6054	0,740 2621	0,742 7865	0,685 7708	0,743 6219	0,673 1399	0,743 3149	42
43	0,971 7903	0,697 6929	0,752 5869	0,729 7585	0,698 6215	0,731 5405	0,686 0135	0,731 4538	43
44	0,977 0198	0,680 6858	0,764 6156	0,716 5180	0,711 2429	0,719 2368	0,698 6742	0,719 3698	44
45	0,981 8721	0,663 5907	0,776 3468	0,703 0701	0,723 6315	0,706 7148	0,711 1183	0,707 0667	45
46	0,986 3568	0,646 4141	0,787 7788	0,689 4201	0,735 7836	0,693 9786	0,723 3420	0,694 5484	46
47	0,990 4826	0,629 1624	0,798 9104	0,675 5732	0,747 6957	0,681 0325	0,735 3416	0,681 8186	47
48	0,994 2581	0,611 8418	0,809 7403	0,661 5346	0,759 3644	0,667 8806	0,747 1133	0,668 8814	48
49	0,997 6915	0,594 4583	0,820 2674	0,647 3097	0,770 7865	0,654 5271	0,758 6538	0,655 7408	49
50	1,000 7906	0,577 0178	0,830 4905	0,632 9037	0,781 9587	0,640 9765	0,769 9595	0,642 4008	50
51	1,003 5631	0,559 5260	0,840 4088	0,618 3219	0,792 8780	0,627 2331	0,781 0270	0,628 8655	51
52	1,006 0163	0,541 9886	0,850 0214	0,603 5697	0,803 5412	0,613 3013	0,791 8529	0,615 1392	52
53	1,008 1571	0,524 4112	0,859 3275	0,588 6523	0,813 9456	0,599 1857	0,802 4341	0,601 2261	53
54	1,009 9924	0,506 7991	0,868 3266	0,573 5753	0,824 0882	0,584 8908	0,812 7674	0,587 1304	54
55	1,011 5288	0,489 1576	0,877 0180	0,558 3438	0,833 9662	0,570 4211	0,822 8496	0,572 8566	55
56	1,012 7727	0,471 4918	0,885 4013	0,542 9633	0,843 5772	0,555 7814	0,832 6779	0,558 4090	56
57	1,013 7300	0,453 8068	0,893 4761	0,527 4393	0,852 9184	0,540 9763	0,842 2491	0,543 7921	57
58	1,014 4068	0,436 1076	0,901 2420	0,511 7769	0,861 9875	0,526 0105	0,851 5606	0,529 0105	58
59	1,014 8088	0,418 3989	0,908 6990	0,495 9818	0,870 7820	0,510 8888	0,860 6095	0,514 0686	59
60	1,014 9416	0,400 6856	0,915 8469	0,480 0592	0,879 2998	0,495 6161	0,869 3931	0,498 9711	60

ϑ^0	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^7}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^9}$	ϑ^0
60	1,014 9416	0,400 6856	0,915 8469	0,480 0592	0,879 2998	0,495 6161	0,869 3931	0,498 9711	60
61	1,014 8106	0,382 9723	0,922 6856	0,464 0145	0,887 5385	0,480 1972	0,877 9089	0,483 7226	61
62	1,014 4210	0,365 2636	0,929 2152	0,447 8531	0,895 4962	0,464 6368	0,886 1543	0,468 3279	62
63	1,013 7779	0,347 5638	0,935 4357	0,431 5805	0,903 1709	0,448 9401	0,894 1270	0,452 7916	63
64	1,012 8862	0,329 8775	0,941 3475	0,415 2021	0,910 5606	0,433 1119	0,901 8245	0,437 1185	64
65	1,011 7508	0,312 2089	0,946 9508	0,398 7231	0,917 6636	0,417 1572	0,909 2447	0,421 3136	65
66	1,010 3763	0,294 5621	0,952 2458	0,382 1491	0,924 4782	0,401 0810	0,916 3853	0,405 3815	66
67	1,008 7672	0,276 9414	0,957 2331	0,365 4853	0,931 0026	0,384 8885	0,923 2444	0,389 3273	67
68	1,006 9281	0,259 3508	0,961 9130	0,348 7371	0,937 2355	0,368 5846	0,929 8198	0,373 1559	68
69	1,004 8631	0,241 7943	0,966 2863	0,331 9099	0,943 1754	0,352 1745	0,936 1098	0,356 8722	69
70	1,002 5765	0,224 2758	0,970 3535	0,315 0091	0,948 8209	0,335 6633	0,942 1124	0,340 4811	70
71	1,000 0724	0,206 7991	0,974 1152	0,298 0400	0,954 1709	0,319 0561	0,947 8261	0,323 9879	71
72	0,997 3547	0,189 3679	0,977 5724	0,281 0079	0,959 2241	0,302 3582	0,953 2491	0,307 3975	72
73	0,994 4274	0,171 9860	0,980 7257	0,263 9180	0,963 9796	0,285 5746	0,958 3799	0,290 7149	73
74	0,991 2942	0,154 6571	0,983 5761	0,246 7758	0,968 4363	0,268 7107	0,963 2171	0,273 9454	74
75	0,987 9589	0,137 3845	0,986 1246	0,229 5865	0,972 5934	0,251 7716	0,967 7592	0,257 0940	75
76	0,984 4252	0,120 1719	0,988 3721	0,212 3554	0,976 4501	0,234 7625	0,972 0051	0,240 1660	76
77	0,980 6964	0,103 0227	0,990 3198	0,195 0876	0,980 0058	0,217 6888	0,975 9536	0,223 1664	77
78	0,976 7762	0,085 9403	0,991 9687	0,177 7884	0,983 2598	0,200 5556	0,979 6035	0,206 1005	78
79	0,972 6679	0,068 9279	0,993 3201	0,160 4631	0,986 2116	0,183 3683	0,982 9540	0,188 9735	79
80	0,968 3748	0,051 9889	0,994 3751	0,143 1167	0,988 8609	0,166 1321	0,986 0040	0,171 7907	80
81	0,963 9002	0,035 1263	0,995 1353	0,125 7545	0,991 2072	0,148 8523	0,988 7528	0,154 5572	81
82	0,959 2473	0,018 3434	0,995 6017	0,108 3817	0,993 2505	0,131 5342	0,991 1997	0,137 2785	82
83	0,954 4191	0,001 6433	0,995 7760	0,091 0032	0,994 9905	0,114 1831	0,993 3441	0,119 9596	83
84	0,949 4188	–0,014 9711	0,995 6596	0,073 6242	0,996 4271	0,096 8043	0,995 1853	0,102 6060	84
85	0,944 2494	–0,031 4967	0,995 2540	0,056 2498	0,997 5604	0,079 4030	0,996 7230	0,085 2229	85
86	0,938 9137	–0,047 9307	0,994 5607	0,038 8850	0,998 3906	0,061 9846	0,997 9569	0,067 8155	86
87	0,933 4146	–0,064 2700	0,993 5814	0,021 5347	0,998 9179	0,044 5544	0,998 8866	0,050 3893	87
88	0,927 7551	–0,080 5120	0,992 3178	0,004 2041	0,999 1425	0,027 1175	0,999 5121	0,032 9496	88
89	0,921 9378	–0,096 6539	0,990 7716	–0,013 1021	0,999 0648	0,009 6795	0,999 8332	0,015 5016	89
90	0,915 9656	–0,112 6929	0,988 9445	–0,030 3787	0,998 6853	–0,007 7546	0,999 8500	–0,001 9494	90
91	0,909 8410	–0,128 6262	0,986 8385	–0,047 6211	0,998 0045	–0,025 1795	0,999 5626	–0,019 3980	91
92	0,903 5668	–0,144 4514	0,984 4553	–0,064 8243	0,997 0232	–0,042 5898	0,998 9712	–0,036 8389	92
93	0,897 1455	–0,160 1658	0,981 7968	–0,081 9835	0,995 7420	–0,059 9804	0,998 0760	–0,054 2669	93
94	0,890 5796	–0,175 7669	0,978 8651	–0,099 0939	0,994 1617	–0,077 3460	0,996 8776	–0,071 6766	94
95	0,883 8717	–0,191 2521	0,975 6621	–0,116 1507	0,992 2833	–0,094 6815	0,995 3763	–0,089 0628	95
96	0,877 0242	–0,206 6190	0,972 1898	–0,133 1493	0,990 1077	–0,111 9815	0,993 5728	–0,106 4200	96
97	0,870 0396	–0,221 8652	0,968 4504	–0,150 0850	0,987 6359	–0,129 2410	0,991 4676	–0,123 7432	97
98	0,862 9203	–0,236 9883	0,964 4460	–0,166 9531	0,984 8691	–0,146 4548	0,989 0617	–0,141 0270	98
99	0,855 6685	–0,251 9860	0,960 1787	–0,183 7490	0,981 8085	–0,163 6177	0,986 3557	–0,158 2662	99
100	0,848 2866	–0,266 8560	0,955 6508	–0,200 4681	0,978 4555	–0,180 7247	0,983 3507	–0,175 4556	100
101	0,840 7770	–0,281 5961	0,950 8644	–0,217 1060	0,974 8113	–0,197 7706	0,980 0476	–0,192 5899	101
102	0,833 1418	–0,296 2040	0,945 8220	–0,233 6581	0,970 8776	–0,214 7503	0,976 4475	–0,209 6640	102
103	0,825 3832	–0,310 6775	0,940 5257	–0,250 1199	0,966 6557	–0,231 6589	0,972 5518	–0,226 6727	103
104	0,817 5035	–0,325 0146	0,934 9781	–0,266 4872	0,962 1473	–0,248 4913	0,968 3616	–0,243 6107	104
105	0,809 5048	–0,339 2130	0,929 1814	–0,282 7554	0,957 3541	–0,265 2425	0,963 8783	–0,260 4731	105
106	0,801 3892	–0,353 2709	0,923 1381	–0,298 9203	0,952 2779	–0,281 9076	0,959 1034	–0,277 2547	106
107	0,793 1588	–0,367 1861	0,916 8508	–0,314 9776	0,946 9204	–0,298 4817	0,954 0384	–0,293 9505	107
108	0,784 8158	–0,380 9567	0,910 3218	–0,330 9230	0,941 2837	–0,314 9598	0,948 6850	–0,310 5553	108
109	0,776 3621	–0,394 5807	0,903 5537	–0,346 7524	0,935 3697	–0,331 3370	0,943 0448	–0,327 0642	109
110	0,767 7997	–0,408 0562	0,896 5491	–0,362 4616	0,929 1805	–0,347 6087	0,937 1197	–0,343 4721	110
111	0,759 1307	–0,421 3814	0,889 3107	–0,378 0465	0,922 7181	–0,363 7700	0,930 9116	–0,359 7742	111
112	0,750 3570	–0,434 5543	0,881 8411	–0,393 5030	0,915 9849	–0,379 8161	0,924 4224	–0,375 9654	112
113	0,741 4805	–0,447 5732	0,874 1428	–0,408 8272	0,908 9831	–0,395 7423	0,917 6542	–0,392 0410	113
114	0,732 5033	–0,460 4363	0,866 2187	–0,424 0151	0,901 7149	–0,411 5440	0,910 6092	–0,407 9960	114
115	0,723 4271	–0,473 1418	0,858 0715	–0,439 0627	0,894 1830	–0,427 2166	0,903 2894	–0,423 8256	115
116	0,714 2540	–0,485 6881	0,849 7039	–0,453 9661	0,886 3896	–0,442 7554	0,895 6973	–0,439 5251	116
117	0,704 9856	–0,498 0734	0,841 1187	–0,468 7217	0,878 3374	–0,458 1559	0,887 8351	–0,455 0898	117
118	0,695 6239	–0,510 2962	0,832 3188	–0,483 3255	0,870 0290	–0,473 4136	0,879 7054	–0,470 5149	118
119	0,686 1707	–0,522 3547	0,823 3070	–0,497 7738	0,861 4671	–0,488 5241	0,871 3108	–0,485 7958	119
120	0,676 6277	–0,534 2475	0,814 0861	–0,512 0631	0,852 6544	–0,503 4830	0,862 6536	–0,500 9278	120

ϑ^0	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^7}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^9}$	ϑ^0
120	0,676 6277	–0,534 2475	0,814 0861	–0,512 0631	0,852 6544	–0,503 4830	0,862 6536	–0,500 9278	120
121	0,666 9969	–0,545 9730	0,804 6592	–0,526 1896	0,843 5936	–0,518 2860	0,853 7368	–0,515 9065	121
122	0,657 2798	–0,557 5296	0,795 0291	–0,540 1498	0,834 2878	–0,532 9286	0,844 5629	–0,530 7274	122
123	0,647 4784	–0,568 9159	0,785 1987	–0,553 9402	0,824 7398	–0,547 4067	0,835 1350	–0,545 3859	123
124	0,637 5942	–0,580 1304	0,775 1711	–0,567 5573	0,814 9526	–0,561 7160	0,825 4558	–0,559 8776	124
125	0,627 6290	–0,591 1716	0,764 9494	–0,580 9976	0,804 9293	–0,575 8525	0,815 5284	–0,574 1983	125
126	0,617 5846	–0,602 0383	0,754 5364	–0,594 2579	0,794 6730	–0,589 8120	0,805 3558	–0,588 3435	126
127	0,607 4625	–0,612 7290	0,743 9353	–0,607 3348	0,784 1869	–0,603 5905	0,794 9411	–0,602 3091	127
128	0,597 2645	–0,623 2423	0,733 1491	–0,620 2251	0,773 4741	–0,617 1840	0,784 2876	–0,616 0908	128
129	0,586 9922	–0,633 5770	0,722 1811	–0,632 9255	0,762 5381	–0,630 5885	0,773 3985	–0,629 6845	129
130	0,576 6473	–0,643 7318	0,711 0342	–0,645 4329	0,751 3820	–0,643 8003	0,762 2770	–0,643 0861	130
131	0,566 2314	–0,653 7054	0,699 7116	–0,657 7443	0,740 0093	–0,656 8155	0,750 9267	–0,656 2917	131
132	0,555 7460	–0,663 4966	0,688 2166	–0,669 8565	0,728 4235	–0,669 6303	0,739 3510	–0,669 2971	132
133	0,545 1928	–0,673 1042	0,676 5523	–0,681 7666	0,716 6281	–0,682 2410	0,727 5534	–0,682 0986	133
134	0,534 5734	–0,682 5270	0,664 7219	–0,693 4716	0,704 6266	–0,694 6441	0,715 5375	–0,694 6923	134
135	0,523 8894	–0,691 7639	0,652 7287	–0,704 9688	0,692 4226	–0,706 8360	0,703 3070	–0,707 0743	135
136	0,513 1422	–0,700 8138	0,640 5759	–0,716 2552	0,680 0198	–0,718 8131	0,690 8655	–0,719 2411	136
137	0,502 3335	–0,709 6756	0,628 2668	–0,727 3282	0,667 4218	–0,730 5720	0,678 2170	–0,731 1889	137
138	0,491 4649	–0,718 3482	0,615 8046	–0,738 1850	0,654 6325	–0,742 1094	0,665 3651	–0,742 9141	138
139	0,480 5377	–0,726 8306	0,603 1928	–0,748 8230	0,641 6556	–0,753 4219	0,652 3138	–0,754 4133	139
140	0,469 5536	–0,735 1218	0,590 4346	–0,759 2395	0,628 4949	–0,764 5063	0,639 0670	–0,765 6830	140
141	0,458 5141	–0,743 2208	0,577 5333	–0,769 4322	0,615 1544	–0,775 3595	0,625 6288	–0,776 7199	141
142	0,447 4206	–0,751 1267	0,564 4924	–0,779 3984	0,601 6380	–0,785 9782	0,612 0032	–0,787 5205	142
143	0,436 2747	–0,758 8384	0,551 3152	–0,789 1359	0,587 9496	–0,796 3596	0,598 1944	–0,798 0818	143
144	0,425 0778	–0,766 3552	0,538 0051	–0,798 6422	0,574 0933	–0,806 5006	0,584 2064	–0,808 4004	144
145	0,413 8315	–0,773 6762	0,524 5655	–0,807 9151	0,560 0731	–0,816 3983	0,570 0436	–0,818 4734	145
146	0,402 5371	–0,780 8004	0,510 9998	–0,816 9523	0,545 8931	–0,826 0499	0,555 7102	–0,828 2977	146
147	0,391 1961	–0,787 7271	0,497 3115	–0,825 7516	0,531 5575	–0,835 4526	0,541 2105	–0,837 8703	147
148	0,379 8101	–0,794 4555	0,483 5041	–0,834 3110	0,517 0703	–0,844 6038	0,526 5489	–0,847 1885	148
149	0,368 3803	–0,800 9847	0,469 5810	–0,842 6284	0,502 4359	–0,853 5009	0,511 7297	–0,856 2495	149
150	0,356 9083	–0,807 3141	0,455 5456	–0,850 7018	0,487 6585	–0,862 1413	0,496 7575	–0,865 0504	150
151	0,345 3956	–0,813 4429	0,441 4016	–0,858 5293	0,472 7422	–0,870 5226	0,481 6368	–0,873 5887	151
152	0,333 8434	–0,819 3705	0,427 1523	–0,866 1090	0,457 6916	–0,878 6424	0,466 3721	–0,881 8619	152
153	0,322 2532	–0,825 0960	0,412 8013	–0,873 4392	0,442 5108	–0,886 4983	0,450 9679	–0,889 8674	153
154	0,310 6265	–0,830 6190	0,398 3522	–0,880 5179	0,427 2043	–0,894 0882	0,435 4290	–0,897 6028	154
155	0,298 9646	–0,835 9387	0,383 8084	–0,887 3437	0,411 7764	–0,901 4098	0,419 7599	–0,905 0659	155
156	0,287 2689	–0,841 0546	0,369 1736	–0,893 9149	0,396 2316	–0,908 4612	0,403 9654	–0,912 2545	156
157	0,275 5409	–0,845 9661	0,354 4513	–0,900 2298	0,380 5744	–0,915 2403	0,388 0502	–0,919 1663	157
158	0,263 7819	–0,850 6727	0,339 6450	–0,906 2871	0,364 8092	–0,921 7451	0,372 0191	–0,925 7993	158
159	0,251 9932	–0,855 1737	0,324 7584	–0,912 0852	0,348 9405	–0,927 9739	0,355 8769	–0,932 1516	159
160	0,240 1764	–0,859 4687	0,309 7950	–0,917 6228	0,332 9729	–0,933 9249	0,339 6283	–0,938 2211	160
161	0,228 3327	–0,863 5573	0,294 7585	–0,922 8986	0,316 9109	–0,939 5963	0,323 2783	–0,944 0062	161
162	0,216 4635	–0,867 4389	0,279 6524	–0,927 9114	0,300 7592	–0,944 9866	0,306 8319	–0,949 5051	162
163	0,204 5702	–0,871 1131	0,264 4804	–0,932 6600	0,284 5222	–0,950 0943	0,290 2937	–0,954 7161	163
164	0,192 6541	–0,874 5796	0,249 2460	–0,937 1432	0,268 2047	–0,954 9179	0,273 6690	–0,959 6378	164
165	0,180 7166	–0,877 8379	0,233 9530	–0,941 3600	0,251 8113	–0,959 4560	0,256 9625	–0,964 2685	165
166	0,168 7590	–0,880 8877	0,218 6049	–0,945 3093	0,235 3467	–0,963 7073	0,240 1793	–0,968 6070	166
167	0,156 7828	–0,883 7286	0,203 2054	–0,948 9904	0,218 8154	–0,967 6707	0,223 3244	–0,972 6519	167
168	0,144 7892	–0,886 3603	0,187 7582	–0,952 4023	0,202 2222	–0,971 3451	0,206 4029	–0,976 4021	168
169	0,132 7796	–0,888 7826	0,172 2668	–0,955 5441	0,185 5718	–0,974 7293	0,189 4198	–0,979 8564	169
170	0,120 7553	–0,890 9951	0,156 7350	–0,958 4153	0,168 8690	–0,977 8224	0,172 3801	–0,983 0138	170
171	0,108 7177	–0,892 9977	0,141 1664	–0,961 0150	0,152 1184	–0,980 6236	0,155 2890	–0,985 8733	171
172	0,096 6681	–0,894 7900	0,125 5647	–0,963 3427	0,135 3248	–0,983 1321	0,138 1516	–0,988 4341	172
173	0,084 6079	–0,896 3720	0,109 9336	–0,965 3979	0,118 4930	–0,985 3471	0,120 9730	–0,990 6955	173
174	0,072 5383	–0,897 7433	0,094 2767	–0,967 1800	0,101 6277	–0,987 2681	0,103 7582	–0,992 6567	174
175	0,060 4608	–0,898 9040	0,078 5977	–0,968 6886	0,084 7336	–0,988 8944	0,086 5125	–0,994 3171	175
176	0,048 3766	–0,899 8538	0,062 9002	–0,969 9235	0,067 8156	–0,990 2257	0,069 2410	–0,995 6764	176
177	0,036 2871	–0,900 5926	0,047 1881	–0,970 8842	0,050 8785	–0,991 2615	0,051 9488	–0,996 7340	177
178	0,024 1936	–0,901 1204	0,031 4649	–0,971 5706	0,033 9270	–0,992 0016	0,034 6412	–0,997 4896	178
179	0,012 0975	–0,901 4371	0,015 7343	–0,971 9825	0,016 9659	–0,992 4458	0,017 3232	–0,997 9431	179
180	0	–0,901 5427	0	–0,972 1198	0	–0,992 5938	0	–0,998 0943	180

ϑ^0	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^7}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^9}$	ϑ^0
180	0	–0,901 5427	0	–0,972 1198	0	–0,992 5938	0	–0,998 0943	180
181	–0,012 0975	–0,901 4371	–0,015 7343	–0,971 9825	–0,016 9659	–0,992 4458	–0,017 3232	–0,997 9431	181
182	–0,024 1936	–0,901 1204	–0,031 4649	–0,971 5706	–0,033 9270	–0,992 0016	–0,034 6412	–0,997 4896	182
183	–0,036 2871	–0,900 5926	–0,047 1881	–0,970 8842	–0,050 8785	–0,991 2615	–0,051 9488	–0,996 7340	183
184	–0,048 3766	–0,899 8538	–0,062 9002	–0,969 9235	–0,067 8156	–0,990 2257	–0,069 2410	–0,995 6764	184
185	–0,060 4608	–0,898 9040	–0,078 5977	–0,968 6886	–0,084 7336	–0,988 8944	–0,086 5125	–0,994 3171	185
186	–0,072 5383	–0,897 7433	–0,094 2767	–0,967 1800	–0,101 6277	–0,987 2681	–0,103 7582	–0,992 6567	186
187	–0,084 6079	–0,896 3720	–0,109 9336	–0,965 3979	–0,118 4930	–0,985 3471	–0,120 9730	–0,990 6955	187
188	–0,096 6681	–0,894 7900	–0,125 5647	–0,963 3427	–0,135 3248	–0,983 1321	–0,138 1516	–0,988 4341	188
189	–0,108 7177	–0,892 9977	–0,141 1664	–0,961 0150	–0,152 1184	–0,980 6236	–0,155 2890	–0,985 8733	189
190	–0,120 7553	–0,890 9951	–0,156 7350	–0,958 4153	–0,168 8690	–0,977 8224	–0,172 3801	–0,983 0138	190
191	–0,132 7796	–0,888 7826	–0,172 2668	–0,955 5441	–0,185 5718	–0,974 7293	–0,189 4198	–0,979 8564	191
192	–0,144 7892	–0,886 3603	–0,187 7582	–0,952 4023	–0,202 2222	–0,971 3451	–0,206 4029	–0,976 4021	192
193	–0,156 7828	–0,883 7286	–0,203 2054	–0,948 9904	–0,218 8154	–0,967 6707	–0,223 3244	–0,972 6519	193
194	–0,168 7590	–0,880 8877	–0,218 6049	–0,945 3093	–0,235 3467	–0,963 7073	–0,240 1793	–0,968 6070	194
195	–0,180 7166	–0,877 8379	–0,233 9530	–0,941 3600	–0,251 8113	–0,959 4560	–0,256 9625	–0,964 2685	195
196	–0,192 6541	–0,874 5796	–0,249 2460	–0,937 1432	–0,268 2047	–0,954 9179	–0,273 6690	–0,959 6378	196
197	–0,204 5702	–0,871 1131	–0,264 4804	–0,932 6600	–0,284 5222	–0,950 0943	–0,290 2937	–0,954 7161	197
198	–0,216 4635	–0,867 4389	–0,279 6524	–0,927 9114	–0,300 7592	–0,944 9866	–0,306 8319	–0,949 5051	198
199	–0,228 3327	–0,863 5573	–0,294 7585	–0,922 8986	–0,316 9109	–0,939 5963	–0,323 2783	–0,944 0062	199
200	–0,240 1764	–0,859 4687	–0,309 7950	–0,917 6228	–0,332 9729	–0,933 9249	–0,339 6283	–0,938 2211	200
201	–0,251 9932	–0,855 1737	–0,324 7584	–0,912 0852	–0,348 9405	–0,927 9739	–0,355 8769	–0,932 1516	201
202	–0,263 7819	–0,850 6727	–0,339 6450	–0,906 2871	–0,364 8092	–0,921 7451	–0,372 0191	–0,925 7993	202
203	–0,275 5409	–0,845 9661	–0,354 4513	–0,900 2298	–0,380 5744	–0,915 2403	–0,388 0502	–0,919 1663	203
204	–0,287 2689	–0,841 0546	–0,369 1736	–0,893 9149	–0,396 2316	–0,908 4612	–0,403 9654	–0,912 2545	204
205	–0,298 9646	–0,835 9387	–0,383 8084	–0,887 3437	–0,411 7764	–0,901 4098	–0,419 7599	–0,905 0659	205
206	–0,310 6265	–0,830 6190	–0,398 3522	–0,880 5179	–0,427 2043	–0,894 0882	–0,435 4290	–0,897 6028	206
207	–0,322 2532	–0,825 0960	–0,412 8013	–0,873 4392	–0,442 5108	–0,886 4983	–0,450 9679	–0,889 8674	207
208	–0,333 8434	–0,819 3705	–0,427 1523	–0,866 1090	–0,457 6916	–0,878 6424	–0,466 3721	–0,881 8619	208
209	–0,345 3956	–0,813 4429	–0,441 4016	–0,858 5293	–0,472 7422	–0,870 5226	–0,481 6368	–0,873 5887	209
210	–0,356 9083	–0,807 3141	–0,455 5456	–0,850 7018	–0,487 6585	–0,862 1413	–0,496 7575	–0,865 0504	210
211	–0,368 3803	–0,800 9847	–0,469 5810	–0,842 6284	–0,502 4359	–0,853 5009	–0,511 7297	–0,856 2495	211
212	–0,379 8101	–0,794 4555	–0,483 5041	–0,834 3110	–0,517 0703	–0,844 6038	–0,526 5489	–0,847 1885	212
213	–0,391 1961	–0,787 7271	–0,497 3115	–0,825 7516	–0,531 5575	–0,835 4526	–0,541 2105	–0,837 8703	213
214	–0,402 5371	–0,780 8004	–0,510 9998	–0,816 9523	–0,545 8931	–0,826 0499	–0,555 7102	–0,828 2977	214
215	–0,413 8315	–0,773 6762	–0,524 5655	–0,807 9151	–0,560 0731	–0,816 3983	–0,570 0436	–0,818 4734	215
216	–0,425 0778	–0,766 3552	–0,538 0051	–0,798 6422	–0,574 0933	–0,806 5006	–0,584 2064	–0,808 4004	216
217	–0,436 2747	–0,758 8384	–0,551 3152	–0,789 1359	–0,587 9496	–0,796 3596	–0,598 1944	–0,798 0818	217
218	–0,447 4206	–0,751 1267	–0,564 4924	–0,779 3984	–0,601 6380	–0,785 9782	–0,612 0032	–0,787 5205	218
219	–0,458 5141	–0,743 2208	–0,577 5333	–0,769 4322	–0,615 1544	–0,775 3595	–0,625 6288	–0,776 7199	219
220	–0,469 5536	–0,735 1218	–0,590 4346	–0,759 2395	–0,628 4949	–0,764 5063	–0,639 0670	–0,765 6830	220
221	–0,480 5377	–0,726 8306	–0,603 1928	–0,748 8230	–0,641 6556	–0,753 4219	–0,652 3138	–0,754 4133	221
222	–0,491 4649	–0,718 3482	–0,615 8046	–0,738 1850	–0,654 6325	–0,742 1094	–0,665 3651	–0,742 9141	222
223	–0,502 3335	–0,709 6756	–0,628 2668	–0,727 3282	–0,667 4218	–0,730 5720	–0,678 2170	–0,731 1889	223
224	–0,513 1422	–0,700 8138	–0,640 5759	–0,716 2552	–0,680 0198	–0,718 8131	–0,690 8655	–0,719 2411	224
225	–0,523 8894	–0,691 7639	–0,652 7287	–0,704 9688	–0,692 4226	–0,706 8360	–0,703 3070	–0,707 0743	225
226	–0,534 5734	–0,682 5270	–0,664 7219	–0,693 4716	–0,704 6266	–0,694 6441	–0,715 5375	–0,694 6923	226
227	–0,545 1928	–0,673 1042	–0,676 5523	–0,681 7666	–0,716 6281	–0,682 2410	–0,727 5534	–0,682 0986	227
228	–0,555 7460	–0,663 4966	–0,688 2166	–0,669 8565	–0,728 4235	–0,669 6303	–0,739 3510	–0,669 2971	228
229	–0,566 2314	–0,653 7054	–0,699 7116	–0,657 7443	–0,740 0093	–0,656 8155	–0,750 9267	–0,656 2917	229
230	–0,576 6473	–0,643 7318	–0,711 0342	–0,645 4329	–0,751 3820	–0,643 8003	–0,762 2770	–0,643 0861	230
231	–0,586 9922	–0,633 5770	–0,722 1811	–0,632 9255	–0,762 5381	–0,630 5885	–0,773 3985	–0,629 6845	231
232	–0,597 2645	–0,623 2423	–0,733 1491	–0,620 2251	–0,773 4741	–0,617 1840	–0,784 2876	–0,616 0908	232
233	–0,607 4625	–0,612 7290	–0,743 9353	–0,607 3348	–0,784 1869	–0,603 5905	–0,794 9411	–0,602 3091	233
234	–0,617 5846	–0,602 0383	–0,754 5364	–0,594 2579	–0,794 6730	–0,589 8120	–0,805 3558	–0,588 3435	234
235	–0,627 6290	–0,591 1716	–0,764 9494	–0,580 9976	–0,804 9293	–0,575 8525	–0,815 5284	–0,574 1983	235
236	–0,637 5942	–0,580 1304	–0,775 1711	–0,567 5573	–0,814 9526	–0,561 7160	–0,825 4558	–0,559 8776	236
237	–0,647 4784	–0,568 9159	–0,785 1987	–0,553 9402	–0,824 7398	–0,547 4067	–0,835 1350	–0,545 3859	237
238	–0,657 2798	–0,557 5296	–0,795 0291	–0,540 1498	–0,834 2878	–0,532 9286	–0,844 5629	–0,530 7274	238
239	–0,666 9969	–0,545 9730	–0,804 6592	–0,526 1896	–0,843 5936	–0,518 2860	–0,853 7368	–0,515 9065	239
240	–0,676 6277	–0,534 2475	–0,814 0861	–0,512 0631	–0,852 6544	–0,503 4830	–0,862 6536	–0,500 9278	240

ϑ^0	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\vartheta}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\vartheta}{n^5}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n^6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\vartheta}{n^7}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n^8}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\vartheta}{n^9}$	ϑ^0
240	—0,676 6277	—0,534 2475	—0,814 0861	—0,512 0631	—0,852 6544	—0,503 4830	—0,862 6536	—0,500 9278	240
241	—0,686 1707	—0,522 3547	—0,823 3070	—0,497 7738	—0,861 4671	—0,488 5241	—0,871 3108	—0,485 7958	241
242	—0,695 6239	—0,510 2962	—0,832 3188	—0,483 3255	—0,870 0290	—0,473 4136	—0,879 7054	—0,470 5149	242
243	—0,704 9856	—0,498 0734	—0,841 1187	—0,468 7217	—0,878 3374	—0,458 1559	—0,887 8351	—0,455 0898	243
244	—0,714 2540	—0,485 6881	—0,849 7039	—0,453 9661	—0,886 3896	—0,442 7554	—0,895 6973	—0,439 5251	244
245	—0,723 4271	—0,473 1418	—0,858 0715	—0,439 0627	—0,894 1830	—0,427 2166	—0,903 2894	—0,423 8256	245
246	—0,732 5033	—0,460 4363	—0,866 2187	—0,424 0151	—0,901 7149	—0,411 5440	—0,910 6092	—0,407 9960	246
247	—0,741 4805	—0,447 5732	—0,874 1428	—0,408 8272	—0,908 9831	—0,395 7423	—0,917 6542	—0,392 0410	247
248	—0,750 3570	—0,434 5543	—0,881 8411	—0,393 5030	—0,915 9849	—0,379 8161	—0,924 4224	—0,375 9654	248
249	—0,759 1307	—0,421 3814	—0,889 3107	—0,378 0465	—0,922 7181	—0,363 7700	—0,930 9116	—0,359 7742	249
250	—0,767 7997	—0,408 0562	—0,896 5491	—0,362 4616	—0,929 1805	—0,347 6087	—0,937 1197	—0,343 4721	250
251	—0,776 3621	—0,394 5807	—0,903 5537	—0,346 7524	—0,935 3697	—0,331 3370	—0,943 0448	—0,327 0642	251
252	—0,784 8158	—0,380 9567	—0,910 3218	—0,330 9230	—0,941 2837	—0,314 9598	—0,948 6850	—0,310 5553	252
253	—0,793 1588	—0,367 1861	—0,916 8508	—0,314 9776	—0,946 9204	—0,298 4817	—0,954 0384	—0,293 9505	253
254	—0,801 3892	—0,353 2709	—0,923 1381	—0,298 9203	—0,952 2779	—0,281 9076	—0,959 1034	—0,277 2547	254
255	—0,809 5048	—0,339 2130	—0,929 1814	—0,282 7554	—0,957 3541	—0,265 2425	—0,963 8783	—0,260 4731	255
256	—0,817 5035	—0,325 0146	—0,934 9781	—0,266 4872	—0,962 1473	—0,248 4913	—0,968 3616	—0,243 6107	256
257	—0,825 3832	—0,310 6775	—0,940 5257	—0,250 1199	—0,966 6557	—0,231 6589	—0,972 5518	—0,226 6727	257
258	—0,833 1418	—0,296 2040	—0,945 8220	—0,233 6581	—0,970 8776	—0,214 7503	—0,976 4475	—0,209 6640	258
259	—0,840 7770	—0,281 5961	—0,950 8644	—0,217 1060	—0,974 8113	—0,197 7706	—0,980 0476	—0,192 5899	259
260	—0,848 2866	—0,266 8560	—0,955 6508	—0,200 4681	—0,978 4555	—0,180 7247	—0,983 3507	—0,175 4556	260
261	—0,855 6685	—0,251 9860	—0,960 1787	—0,183 7490	—0,981 8085	—0,163 6177	—0,986 3557	—0,158 2662	261
262	—0,862 9203	—0,236 9883	—0,964 4460	—0,166 9531	—0,984 8691	—0,146 4548	—0,989 0617	—0,141 0270	262
263	—0,870 0396	—0,221 8652	—0,968 4504	—0,150 0850	—0,987 6359	—0,129 2410	—0,991 4676	—0,123 7432	263
264	—0,877 0242	—0,206 6190	—0,972 1898	—0,133 1493	—0,990 1077	—0,111 9815	—0,993 5728	—0,106 4200	264
265	—0,883 8717	—0,191 2521	—0,975 6621	—0,116 1507	—0,992 2833	—0,094 6815	—0,995 3763	—0,089 0628	265
266	—0,890 5796	—0,175 7669	—0,978 8651	—0,099 0939	—0,994 1617	—0,077 3460	—0,996 8776	—0,071 6766	266
267	—0,897 1455	—0,160 1658	—0,981 7968	—0,081 9835	—0,995 7420	—0,059 9804	—0,998 0760	—0,054 2669	267
268	—0,903 5668	—0,144 4514	—0,984 4553	—0,064 8243	—0,997 0232	—0,042 5898	—0,998 9712	—0,036 8389	268
269	—0,909 8410	—0,128 6262	—0,986 8385	—0,047 6211	—0,998 0045	—0,025 1795	—0,999 5626	—0,019 3980	269
270	—0,915 9656	—0,112 6929	—0,988 9445	—0,030 3787	—0,998 6853	—0,007 7546	—0,999 8500	—0,001 9494	270
271	—0,921 9378	—0,096 6539	—0,990 7716	—0,013 1021	—0,999 0648	0,009 6795	—0,999 8332	0,015 5016	271
272	—0,927 7551	—0,080 5120	—0,992 3178	0,004 2041	—0,999 1425	0,027 1175	—0,999 5121	0,032 9496	272
273	—0,933 4146	—0,064 2700	—0,993 5814	0,021 5347	—0,998 9179	0,044 5544	—0,998 8866	0,050 3893	273
274	—0,938 9137	—0,047 9307	—0,994 5607	0,038 8850	—0,998 3906	0,061 9846	—0,997 9569	0,067 8155	274
275	—0,944 2494	—0,031 4967	—0,995 2540	0,056 2498	—0,997 5604	0,079 4030	—0,996 7230	0,085 2229	275
276	—0,949 4188	—0,014 9711	—0,995 6596	0,073 6242	—0,996 4271	0,096 8043	—0,995 1853	0,102 6060	276
277	—0,954 4191	0,001 6433	—0,995 7760	0,091 0032	—0,994 9905	0,114 1831	—0,993 3441	0,119 9596	277
278	—0,959 2473	0,018 3434	—0,995 6017	0,108 3817	—0,993 2505	0,131 5342	—0,991 1997	0,137 2785	278
279	—0,963 9002	0,035 1263	—0,995 1353	0,125 7545	—0,991 2072	0,148 8523	—0,988 7528	0,154 5572	279
280	—0,968 3748	0,051 9889	—0,994 3751	0,143 1167	—0,988 8609	0,166 1321	—0,986 0040	0,171 7907	280
281	—0,972 6679	0,068 9279	—0,993 3201	0,160 4631	—0,986 2116	0,183 3683	—0,982 9540	0,188 9735	281
282	—0,976 7762	0,085 9403	—0,991 9687	0,177 7884	—0,983 2598	0,200 5556	—0,979 6035	0,206 1005	282
283	—0,980 6964	0,103 0227	—0,990 3198	0,195 0876	—0,980 0058	0,217 6888	—0,975 9536	0,223 1664	283
284	—0,984 4252	0,120 1719	—0,988 3721	0,212 3554	—0,976 4501	0,234 7625	—0,972 0051	0,240 1660	284
285	—0,987 9589	0,137 3845	—0,986 1246	0,229 5865	—0,972 5934	0,251 7716	—0,967 7592	0,257 0940	285
286	—0,991 2942	0,154 6571	—0,983 5761	0,246 7758	—0,968 4363	0,268 7107	—0,963 2171	0,273 9454	286
287	—0,994 4274	0,171 9860	—0,980 7257	0,263 9180	—0,963 9796	0,285 5746	—0,958 3799	0,290 7149	287
288	—0,997 3547	0,189 3679	—0,977 5724	0,281 0079	—0,959 2241	0,302 3582	—0,953 2491	0,307 3975	288
289	—1,000 0724	0,206 7991	—0,974 1152	0,298 0400	—0,954 1709	0,319 0561	—0,947 8261	0,323 9879	289
290	—1,002 5765	0,224 2758	—0,970 3535	0,315 0091	—0,948 8209	0,335 6633	—0,942 1124	0,340 4811	290
291	—1,004 8631	0,241 7943	—0,966 2863	0,331 9099	—0,943 1754	0,352 1745	—0,936 1098	0,356 8722	291
292	—1,006 9281	0,259 3508	—0,961 9130	0,348 7371	—0,937 2355	0,368 5846	—0,929 8198	0,373 1559	292
293	—1,008 7672	0,276 9414	—0,957 2331	0,365 4853	—0,931 0026	0,384 8885	—0,923 2444	0,389 3273	293
294	—1,010 3763	0,294 5621	—0,952 2458	0,382 1491	—0,924 4782	0,401 0810	—0,916 3853	0,405 3815	294
295	—1,011 7508	0,312 2089	—0,946 9508	0,398 7231	—0,917 6636	0,417 1572	—0,909 2447	0,421 3136	295
296	—1,012 8862	0,329 8775	—0,941 3475	0,415 2021	—0,910 5606	0,433 1119	—0,901 8245	0,437 1185	296
297	—1,013 7779	0,347 5638	—0,935 4357	0,431 5805	—0,903 1709	0,448 9401	—0,894 1270	0,452 7916	297
298	—1,014 4210	0,365 2636	—0,929 2152	0,447 8531	—0,895 4962	0,464 6368	—0,886 1543	0,468 3279	298
299	—1,014 8106	0,382 9723	—0,922 6856	0,464 0145	—0,887 5385	0,480 1972	—0,877 9089	0,483 7226	299
300	—1,014 9416	0,400 6856	—0,915 8469	0,480 0592	—0,879 2998	0,495 6161	—0,869 3931	0,498 9711	300

ϑ^0	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^7}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^9}$	ϑ^0
300	–1,014 9416	0,400 6856	–0,915 8469	0,480 0592	–0,879 2998	0,495 6161	–0,869 3931	0,498 9711	300
301	–1,014 8088	0,418 3989	–0,908 6990	0,495 9818	–0,870 7820	0,510 8888	–0,860 6095	0,514 0686	301
302	–1,014 4068	0,436 1076	–0,901 2420	0,511 7769	–0,861 9875	0,526 0105	–0,851 5606	0,529 0105	302
303	–1,013 7300	0,453 8068	–0,893 4761	0,527 4393	–0,852 9184	0,540 9763	–0,842 2491	0,543 7921	303
304	–1,012 7727	0,471 4918	–0,885 4013	0,542 9633	–0,843 5772	0,555 7814	–0,832 6779	0,558 4090	304
305	–1,011 5288	0,489 1576	–0,877 0180	0,558 3438	–0,833 9662	0,570 4211	–0,822 8496	0,572 8566	305
306	–1,009 9924	0,506 7991	–0,868 3266	0,573 5753	–0,824 0882	0,584 8908	–0,812 7674	0,587 1304	306
307	–1,008 1571	0,524 4112	–0,859 3275	0,588 6523	–0,813 9456	0,599 1857	–0,802 4341	0,601 2261	307
308	–1,006 0163	0,541 9886	–0,850 0214	0,603 5697	–0,803 5412	0,613 3013	–0,791 8529	0,615 1392	308
309	–1,003 5631	0,559 5260	–0,840 4088	0,618 3219	–0,792 8780	0,627 2331	–0,781 0270	0,628 8655	309
310	–1,000 7906	0,577 0178	–0,830 4905	0,632 9037	–0,781 9587	0,640 9765	–0,769 9595	0,642 4008	310
311	–0,997 6915	0,594 4583	–0,820 2674	0,647 3097	–0,770 7865	0,654 5271	–0,758 6538	0,655 7408	311
312	–0,994 2581	0,611 8418	–0,809 7403	0,661 5346	–0,759 3644	0,667 8806	–0,747 1133	0,668 8814	312
313	–0,990 4826	0,629 1624	–0,798 9104	0,675 5732	–0,747 6957	0,681 0325	–0,735 3416	0,681 8186	313
314	–0,986 3568	0,646 4141	–0,787 7788	0,689 4201	–0,735 7836	0,693 9786	–0,723 3420	0,694 5484	314
315	–0,981 8721	0,663 5907	–0,776 3468	0,703 0701	–0,723 6315	0,706 7148	–0,711 1183	0,707 0667	315
316	–0,977 0198	0,680 6858	–0,764 6156	0,716 5180	–0,711 2429	0,719 2368	–0,698 6742	0,719 3698	316
317	–0,971 7903	0,697 6929	–0,752 5869	0,729 7585	–0,698 6215	0,731 5405	–0,686 0135	0,731 4538	317
318	–0,966 1743	0,714 6054	–0,740 2621	0,742 7865	–0,685 7708	0,743 6219	–0,673 1399	0,743 3149	318
319	–0,960 1613	0,731 4165	–0,727 6430	0,755 5968	–0,672 6947	0,755 4771	–0,660 0575	0,754 9496	319
320	–0,953 7410	0,748 1190	–0,714 7315	0,768 1843	–0,659 3968	0,767 1021	–0,646 7701	0,766 3541	320
321	–0,946 9022	0,764 7059	–0,701 5294	0,780 5440	–0,645 8813	0,778 4931	–0,633 2819	0,777 5249	321
322	–0,939 6332	0,781 1696	–0,688 0389	0,792 6707	–0,632 1521	0,789 6464	–0,619 5970	0,788 4587	322
323	–0,931 9218	0,797 5027	–0,674 2622	0,804 5594	–0,618 2132	0,800 5582	–0,605 7195	0,799 1518	323
324	–0,923 7552	0,813 6972	–0,660 2016	0,816 2052	–0,604 0691	0,811 2249	–0,591 6537	0,809 6012	324
325	–0,915 1197	0,829 7451	–0,645 8597	0,827 6031	–0,589 7238	0,821 6430	–0,577 4039	0,819 8034	325
326	–0,906 0011	0,845 6381	–0,631 2390	0,838 7483	–0,575 1817	0,831 8090	–0,562 9744	0,829 7553	326
327	–0,896 3843	0,861 3676	–0,616 3423	0,849 6359	–0,560 4474	0,841 7195	–0,548 3697	0,839 4539	327
328	–0,886 2532	0,876 9248	–0,601 1725	0,860 2611	–0,545 5254	0,851 3712	–0,533 5943	0,848 8960	328
329	–0,875 5908	0,892 3006	–0,585 7329	0,870 6192	–0,530 4202	0,860 7609	–0,518 6528	0,858 0789	329
330	–0,864 3791	0,907 4855	–0,570 0265	0,880 7055	–0,515 1366	0,869 8853	–0,503 5497	0,866 9995	330
331	–0,852 5989	0,922 4698	–0,554 0568	0,890 5154	–0,499 6794	0,878 7415	–0,488 2896	0,875 6552	331
332	–0,840 2297	0,937 2434	–0,537 8274	0,900 0443	–0,484 0534	0,887 3264	–0,472 8774	0,884 0431	332
333	–0,827 2494	0,951 7958	–0,521 3421	0,909 2876	–0,468 2636	0,895 6372	–0,457 3177	0,892 1608	333
334	–0,813 6346	0,966 1162	–0,504 6049	0,918 2411	–0,452 3149	0,903 6710	–0,441 6154	0,900 0057	334
335	–0,799 3599	0,980 1932	–0,487 6198	0,926 9002	–0,436 2126	0,911 4251	–0,425 7753	0,907 5753	335
336	–0,784 3980	0,994 0151	–0,470 3912	0,935 2608	–0,419 9617	0,918 8968	–0,409 8023	0,914 8673	336
337	–0,768 7193	1,007 5697	–0,452 9236	0,943 3186	–0,403 5676	0,926 0837	–0,393 7014	0,921 8794	337
338	–0,752 2917	1,020 8441	–0,435 2220	0,951 0694	–0,387 0355	0,932 9832	–0,377 4775	0,928 6093	338
339	–0,735 0804	1,033 8250	–0,417 2912	0,958 5093	–0,370 3708	0,939 5930	–0,361 1358	0,935 0551	339
340	–0,717 0469	1,046 4985	–0,399 1364	0,965 6343	–0,353 5791	0,945 9108	–0,344 6812	0,941 2147	340
341	–0,698 1493	1,058 8497	–0,380 7633	0,972 4406	–0,336 6657	0,951 9345	–0,328 1190	0,947 0861	341
342	–0,678 3411	1,070 8632	–0,362 1776	0,978 9242	–0,319 6364	0,957 6620	–0,311 4542	0,952 6676	342
343	–0,657 5707	1,082 5226	–0,343 3852	0,985 0817	–0,302 4967	0,963 0913	–0,294 6920	0,957 9574	343
344	–0,635 7807	1,093 8108	–0,324 3926	0,990 9095	–0,285 2524	0,968 2205	–0,277 8377	0,962 9538	344
345	–0,612 9061	1,104 7093	–0,305 2063	0,996 4041	–0,267 9094	0,973 0479	–0,260 8965	0,967 6552	345
346	–0,588 8739	1,115 1985	–0,285 8333	1,001 5621	–0,250 4733	0,977 5718	–0,243 8737	0,972 0603	346
347	–0,563 6001	1,125 2576	–0,266 2810	1,006 3805	–0,232 9502	0,981 7906	–0,226 7746	0,976 1676	347
348	–0,536 9882	1,134 8641	–0,246 5571	1,010 8561	–0,215 3460	0,985 7028	–0,209 6045	0,979 9758	348
349	–1,508 9255	1,143 9936	–0,226 6696	1,014 9860	–0,197 6667	0,989 3071	–0,192 3688	0,983 4838	349
350	–1,479 2788	1,152 6197	–0,206 6271	1,018 7674	–0,179 9183	0,992 6023	–0,175 0730	0,986 6904	350
351	–1,447 8883	1,160 7135	–0,186 4386	1,022 1978	–0,162 1071	0,995 5871	–0,157 7223	0,989 5947	351
352	–1,414 5585	1,168 2427	–0,166 1138	1,025 2746	–0,144 2390	0,998 2606	–0,140 3222	0,992 1956	352
353	–1,379 0448	1,175 1716	–0,145 6628	1,027 9955	–0,126 3203	1,000 6217	–0,122 8782	0,994 4926	353
354	–1,341 0324	1,181 4593	–0,125 0963	1,030 3585	–0,108 3572	1,002 6697	–0,105 3957	0,996 4847	354
355	–1,300 1002	1,187 0589	–0,104 4261	1,032 3616	–0,090 3561	1,004 4039	–0,087 8803	0,998 1714	355
356	–1,255 6559	1,191 9144	–0,083 6645	1,034 0031	–0,072 3231	1,005 8235	–0,070 3373	0,999 5521	356
357	–1,206 8033	1,195 9574	–0,062 8251	1,035 2816	–0,054 2647	1,006 9283	–0,052 7723	1,000 6265	357
358	–1,152 0216	1,199 0990	–0,041 9229	1,036 1958	–0,036 1871	1,007 7176	–0,035 1907	1,001 3941	358
359	–1,088 1083	1,201 2119	–0,020 9746	1,036 7447	–0,018 0967	1,008 1914	–0,017 5981	1,001 8548	359
360	0	1,202 0569	0	1,036 9278	0	1,008 3493	0	1,002 0081	360

STEFAN NEUMARK, ingénieur.

SUR LES FORMES DIVERSES DU POTENTIEL SERVANT A CALCULER LES FORCES QUI AGISSENT SUR LES PROFILS D'AVIATION.

TABLE DES MATIÈRES.

§ 1.

Le plus important problème de l'aérodynamique contemporaine c'est la recherche des formules générales pour calculer les forces qui agissent sur les ailes des avions. Ce problème présentant des difficultés considérables, on le simplifie en général, en supposant que l'aile est infiniment longue et que sa section transversale, appelée *profil*, reste partout la même. On admet encore que l'aile se déplace avec une vitesse constante et on considére le mouvement relatif de l'air par rapport à l'aile. Ce mouvement sera plan conformément à nos suppositions. Par conséquent, nous allons chercher les forces qui agissent sur l'unité de longueur de l'aile. Nous ne tiendrons pas compte de l'influence du frottement superficiel, en nous bornant à l'étude des pressions s'exerçant sur les différents points du profil; ces pressions possèdent toujours une résultante P_r (fig. 1). Nous pouvons décomposer cette résultante suivant la direction du vol et la direction perpendiculaire à celle-ci; nous obtenons de cette façon la force P_{x1} („résistance à l'avancement") et P_{y1} („force portante"). Mais nous envisagerons parfois les autres composantes P_x et P_y suivant les axes des coordonnées x, y.

Ces forces dépendent de la forme du profil ainsi que de son inclinaison par rapport à la direction du mouvement; on obtient des conditions avantageuses, c'est-à-dire des valeurs

importantes de Py_1 correspondantes aux faibles valeurs de Px_1, en employant les profils ichtyoïdes munis d'une pointe à l'arrière. Si ces profils présentent un angle d'attaque assez petit, il se produit le phénomène du „*décollement simple*" dont le schéma est représenté sur la fig. 1; on observe une „*couche tourbillonaire*" qui se forme à l'arrière du profil près de la pointe et disparaît à une grande distance du profil [1]).

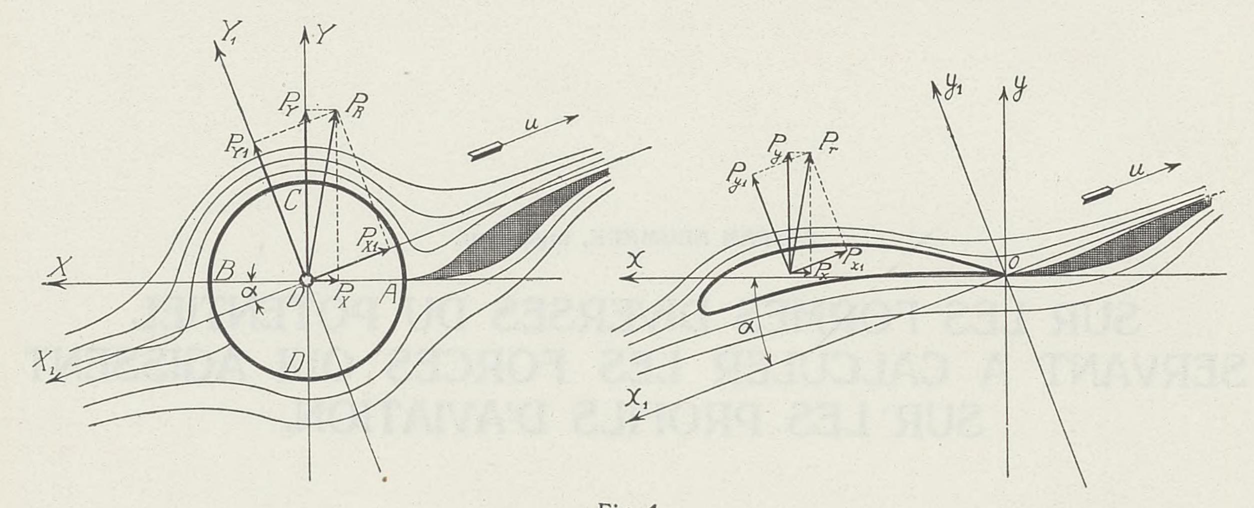


Fig. 1.

Avant de chercher des formules analytiques qui expriment les forces agissantes sur le profil on doit disposer des moyens analytiques pour déterminer le profil même. Nous allons employer dans ce but la méthode de la représentation conforme qui permet de faire correspondre un profil quelconque situé dans un plan $x-y$ à un cercle du rayon a situé dans un autre plan $X-Y$. Nous introduisons les deux variables complexes $z = x + iy$ et $Z = X + iY$; toute fonction analytique qui peut être exprimée par la formule générale:

$$z = F(Z) = Z + C_0\,a + \frac{C_1 a^2}{Z} + \frac{C_2 a^3}{Z^2} + \frac{C_3 a^4}{Z^3} + \cdots = Z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n a^{n+1}}{Z^n}, \quad \ldots \quad (1)$$

transforme le cercle en une courbe fermée; en choisissant convenablement la fonction F, on obtient aisément les profils appliquables à l'aviation.

Pour que le profil possède une pointe unique, la fonction de représentation F doit remplir la condition suivante: l'équation $F'(Z) = \dfrac{dz}{dZ} = 0$ doit avoir une racine Z_0 sur la circonférence (la pointe du profil correspond justement à ce point); s'il existe d'autres racines, elles ne peuvent se trouver qu'à l'intérieur du cercle.

S'il arrive en particulier que $Z_0 = -a$, c. à. d. si l'égalité

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{Z=-a} = F'(-a) = 0\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

est remplie, nous disons que le profil se trouve dans la „position zéro" par rapport à l'axe x qui est appelé, dans ce cas, „axe zéro". Si nous réussirons à trouver la fonction de représentation qui détermine un certain profil dans une position quelconque, nour pourrons obtenir aisément la fonction analogue correspondante à la position zéro.

---

[1]) On trouvera la description détaillée et l'analyse de ce phénomène dans le travail du prof C. Witoszyński: „La mécanique des profils d'aviation" (Paris, Chiron, 1924).

Cette position est très importante, car elle se distingue par la propriété suivante: la force portante est nulle, si la direction du courant est parallèle à l'axe zéro du profil.

On peut arriver aux autres positions relatives du profil et du courant, en faisant tourner, soit le profil dans le sens positif, soit la vitesse du courant dans le sens négatif. Nous allons employer dans la suite la seconde manière conformément à la fig. 1. Cela présente l'avantage que la fonction de représentation d'un profil donné reste toujours la même et ne dépend pas de l'angle d'attaque théorique α [1]).

Le mouvement réel de l'air par rapport au profil peut être remplacé approximativement par un mouvement permanent non tourbillonnaire. Soit $g(z)$ le potentiel de ce mouvement. On peut choisir plusieurs formes de la fonction g; en tout cas, le profil doit représenter une des lignes du courant; en outre, la fonction doit remplir la condition:

$$\lim_{z \to \infty} \left[g'(z) \right] = - u e^{i\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Après avoir déterminé d'une manière quelconque la forme de la fonction $g(z)$, on pourra calculer les forces qui agissent sur le profil, en se servant des formules connues de Blasius:

$$P_y - i P_x = - \frac{\sigma}{2} \oint [g'(z)]^2 \, dz \; ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$M + i N = - \frac{\sigma}{2} \oint [g'(z)]^2 \, z \, dz \; ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

σ désigne, dans ces formules, la densité de l'air, P_y et P_x — les composantes de la force P_r (fig. 1), M — le moment de P_r par rapport à l'origine o; N n'a aucune signification physique; les intégrales seront prises le long du profil tout entier.

Remplaçons dans la fonction $g(z)$ la variable z par son expression (1); nous obtiendrons une fonction nouvelle en Z:

$$f(Z) = g[F(Z)] \; ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

la différenciation donne:

$$f'(Z) = g'(z) \frac{dz}{dZ} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6')$$

où, en vertu de (1):

$$\frac{dz}{dZ} = F'(Z) = 1 - \frac{C_1 a^2}{Z^2} - \frac{2 C_2 a^3}{Z^3} - \frac{3 C_3 a^4}{Z^4} - \cdots = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n C_n a^{n+1}}{Z^{n+1}} \; ; \quad \ldots \quad (7)$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{F'(Z)} = 1 + \frac{C_1 a^2}{Z^2} + \frac{2 C_2 a^3}{Z^3} + \frac{(C_1^2 + 3 C_3) a^4}{Z^4} + \cdots \ldots \ldots \quad (7')$$

La fonction (6) peut être considérée comme le potentiel d'un écoulement autour du cercle primitif dans le plan Z; sa vitesse à l'infini ne diffère pas de celle de l'écoulement autour du profil; en effet:

$$\lim_{Z \to \infty} [f'(Z)] = \lim_{Z \to \infty} \left\{ g'[F(Z)] \cdot F'(Z) \right\} = \lim_{z \to \infty} g'(z) \cdot \lim_{Z \to \infty} [F'(Z)] = - u e^{i\alpha} \cdot 1 = - u e^{i\alpha} . \quad (8)$$

---

[1]) Il ne faut pas confondre cet angle α avec l'angle d'attaque pratique i; ces deux angles diffèrent d'une valeur constante.

En introduisant les fonctions F et f au lieu de g, nous donnerons aux formules de Blasius la forme suivante, bien adaptée aux applications :

$$P_y - i P_x = -\frac{\sigma}{2} \oint [f'(Z)]^2 \frac{dZ}{dz} dZ ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$M + iN = -\frac{\sigma}{2} \oint [f'(Z)]^2 \frac{dZ}{dz} z \, dZ ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

l'intégration doit être effectuée le long de la circonférence $|Z| = a$.

Les formules (9) et (10) ne renferment que les expressions des fonctions $F(Z)$ et $f(Z)$ Nous n'allons pas nous occuper dans ce travail de la fonction de représentation $F(Z)$ qui détermine la forme du profil. C'est seulement le potentiel auxiliaire $f(Z)$ qui sera l'objet de nos recherches. Il faut insister pourtant sur ce que ce potentiel ne représente pas l'écoulement réel autour d'un cercle, puisque c'est seulement le potentiel $g\ (z)$ correspondant au profil ichtyoïde qui peut s'accorder avec le mouvement réel. Le potentiel $f(Z)$ n'est donc qu'un instrument analytique.

Si on voulait se borner aux fonctions uniformes sans discontinuités à l'extérieur du cercle, on n'aurait qu'une forme possible de ce potentiel :

$$f_0(Z) = -u\left(e^{i\alpha} Z + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

la vitesse complexe correspondante s'exprime :

$$f_0'(Z) = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

Mais la vitesse $g'(z)$ correspondante à (11') ne s'accorde — même approximativement — avec la rèalité que dans le cas $\alpha = 0$. En effet, si on introduit (11') dans la formule (9), on arrive aux valeurs nulles de P_y et P_x indépendamment de la valeur de l'angle α; en outre, on aurait la vitesse infinie à la pointe du profil, car nous tirons de (2) et (6') :

$$g_0'[F(-a)] = f_0'(-a) \cdot \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{Z=-a} = -2ui \sin\alpha \cdot \infty = \infty, \ \text{ si } \alpha \neq 0.$$

Donc, si on désire obtenir des résultats plus rapprochés de la réalité, on est obligé de chercher une autre forme du potentiel f; ce potentiel ne peut pas être uniforme; il est soumis aux conditions suivantes.

1-o. Le potentiel f doit être *circulaire*, c. à. d. la circonférence $|Z| = a$ doit représenter une ligne du courant. Soit ϑ l'angle polaire dans le plan Z; nous aurons l'équation de la circonférence: $Z = a e^{i\vartheta}$. Si nous désignons par $Im\ (U)$ la partie imaginaire d'une quantité complexe U, nous pourrons exprimer analytiquement notre condition de deux manières équivalentes :

a) le potentiel du courant Ψ doit être constant pour tous les points de la circonférence, d'où

$$Im\left[f\left(a e^{i\vartheta}\right)\right] = \text{Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

b) la vitesse à ces points doit rester tangente au cercle, c. à. d.

$$Im\left[i e^{i\vartheta} f'\left(a e^{i\vartheta}\right)\right] = 0 \text{ [1]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

2-o. La vitesse à la pointe du profil doit être finie, donc il est nécessaire que la vitesse au point correspondant du cercle ($Z = -a$) soit nulle:

$$f'(-a) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

3-o. La vitesse à l'infini doit être finie et constante — d'après (8):

$$\lim_{Z \to \infty} [f'(Z)] = f'(\infty) = -u e^{i\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Il existe une infinité de potentiels multiformes satisfaisants aux trois conditions données. Il faut en chosir une fonction suffisamment simple pour qu'elle ne cause pas des difficultés insurmontables dans les applications; en même temps, elle doit donner les valeurs de la force portante et de la résistance à l'avancement concordantes avec l'expérience, autant que possible. Or, il n'est pas évident „a priori" qu'une seule forme du potentiel f sera suffisante pour tous les profils. Autrement dit, il n'existe aucune certitude que l'influence de la forme du profil sur les forces P_y et P_x se manifeste exclusivement par le facteur $\frac{dZ}{dz}$ dans la formule (9). Nous devons admettre cependant cette supposition — au moins dans les cas où le décollement simple a lieu, car autrement la méthode même de la représentation conforme serait dépourvue de toute valeur par rapport à notre problème.

Nous admettons donc qu'il existe une seule fonction f, ce qui n'empêche pas de la remplacer par les fonctions les plus variées satisfaisant approximativement aux conditions données. En effet, nos moyens analytiques ne sont pas parfaits — et nous ne serons jamais certains d'avoir trouvé la solution définitive. Il n'y a que des solutions approximatives plus ou moins exactes. Mais ce n'est pas l'exactitude extrême que nous allons poursuivre; il faudrait donner la préférence même à une approximation grossière à la condition qu'elle facilite les applications. Nous avons besoin de formules maniables qui permettent de tirer des conclusions pratiques concernant la forme du profil.

Supposons que nous ayons trouvé une fonction $f(Z)$ qui satisfasse aux conditions 1-o, 2-o, 3-o. Introduisons une nouvelle fonction $f_1(Z)$ qui sera déterminée par la formule:

$$f_1(Z) = f(Z) - f_0(Z), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

où $f_0(Z)$ désigne le potentiel uniforme (11). Nous appellerons la fonction $f_1(Z)$ „le potentiel complémentaire"; elle représente un mouvement plan qui doit être joint au mouvement (11) pour le modifier conformément à nos buts.

Le potentiel complémentaire est assujetti aux conditions suivantes qui résultent immédiatement de (1-o, 2-o, 3-o).

I. Il doit être *circulaire*, comme $f(Z)$, parce que:

$$Im\left[f_1\left(a e^{i\vartheta}\right)\right] = Im\left[f\left(a e^{i\vartheta}\right)\right] - Im\left[f_0\left(a e^{i\vartheta}\right)\right], \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

et de même:

$$Im\left[i e^{i\vartheta} f_1\left(a e^{i\vartheta}\right)\right] = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

---

[1]) Voir: Witoszyński, l. c., p. 10, form. 11; en multipliant cette formule par i, nous obtenons: $v_\vartheta + i v_r = i e^{i\vartheta} f'(Z)$; or, la composante v_r doit être nulle aux points de la circonférence.

II. La vitesse au point $Z = -a$ doit avoir la valeur déterminée:

$$f_1'(-a) = f'(-a) - f_0'(-a) = 0 - (-2ui\sin\alpha) = 2ui\sin\alpha \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

III. La vitesse à l'infini doit être nulle:

$$f_1'(\infty) = f'(\infty) - f_0'(\infty) = -ue^{i\alpha} - \left(-ue^{i\alpha}\right) = 0; \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

la troisième condition signifie que le mouvement complémentaire est une „perturbation locale" dont l'influence se manifeste nettement dans le voisinage du profil et disparaît totalement lorsqu'on s'éloigne à l'infini. Cette perturbation remplace en quelque sorte le système des tourbillons qui se forme à l'arrière du profil; elle doit modifier la répartition des vitesses et des pressions le long du profil et la rendre plus semblable à la répartition réelle.

Nous écrirons l'égalité (16) sous la forme:

$$f(Z) = f_0(Z) + f_1(Z), \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

d'où:

$$f'(Z) = f_0'(Z) + f_1'(Z). \quad \ldots \ldots \quad (21')$$

§ 2.

Le prof. Joukowski a proposé la forme suivante du potentiel complémentaire:

$$f_1(Z) = -\frac{Ci}{2\pi}\lg\frac{Z}{a} = -2aui\sin\alpha\cdot\lg\frac{Z}{a}, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

ce qui exprime un tourbillon unique situé à l'origine des coordonnées; il était nécessaire d'admettre dans la formule ci-dessus que la circulation C satisfait à la relation:

$$C = 4\pi au\sin\alpha, \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

car on devait tenir compte de la condition (II).

D'après (22) la vitesse complexe du mouvement complémentaire est:

$$f_1'(Z) = -\frac{Ci}{2\pi Z} = -\frac{2aui\sin\alpha}{Z}; \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

en particulier, la vitesse aux points du profil circulaire est *constante*:

$$V_c = (v_\vartheta + iv_r)_{Z=ae^{i\vartheta}} = ie^{i\vartheta}f_1'\left(ae^{i\vartheta}\right) = \frac{C}{2\pi a} = 2u\sin\alpha. \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que le potentiel (22) satisfait aussi aux conditions (I) et (III); on peut affirmer qu'il est *la plus simple* de toutes les fonctions que l'on pourrait imaginer.

Si on introduit le potentiel de Joukowski dans la formule première de Blasius, on obtient des résultats dont la simplicité est encore plus remarquable. Nous trouvons en effet, en tenant compte de (9, 21', 11', 24, 7'):

$$P_y - iP_x = -\frac{\sigma}{2}\oint\left[-u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - \frac{2aui\sin\alpha}{Z}\right]^2\cdot\left(1 + \frac{C_1a^2}{Z^2} + \frac{2C_2a^3}{Z^3} + \cdots\right)dZ;$$

cette intégrale doit être prise le long de la circonférence $|Z| = a$; elle se réduit au résidu relatif à l'origine, multiplié par $2\pi i$:

$$P_y - i P_x = -\frac{\sigma u^2}{2} \oint \frac{4ai \sin\alpha \cdot e^{i\alpha}}{Z} dZ = 4\pi\sigma a u^2 \cdot \sin\alpha \cdot e^{i\alpha};$$

nous calculons ensuite, d'après la fig. 1, les composantes P_{y1} et P_{x1}:

$$P_{y1} - i P_{x1} = e^{-i\alpha} (P_y - i P_x) = 4\pi\sigma a u^2 \sin\alpha,$$

d'où:

$$P_{x1} = 0, \quad P_{y1} = 4\pi\sigma a u^2 \sin\alpha = \sigma u C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

indépendamment de la forme du profil!

C'est la simplicité extraordinaire de la théorie de Joukowski qui a contribué à son succès universel. Elle doit être rejetée pourtant pour les motifs suivants.

D'abord, les formules (26) sont en contradiction manifeste avec l'expérience. Les valeurs de la force portante, qui en résultent, surpassent toujours les valeurs réelles, et les différences sont beaucoup plus grandes que les erreurs d'observation; quant à la valeur nulle de la résistance, cette conclusion est absolument fausse.

L'incompatibilité des formules avec les données d'expérience suffit pour rejeter les bases de la théorie; mais on a élevé encore une autre objection dont le caractère est purement théorique. Il s'agit d'une contradiction de cette théorie avec le principe de la conservation de l'énergie. Ceci provient du fait que la vitesse exprimée par la formule (24) diminue trop lentement lorsque Z tend vers l'infini: elle n'est qu'une valeur infiniment petite du premier ordre; par conséquence, l'énergie cinétique totale d'une couche illimitée du fluide d'épaisseur finie serait infiniment grande [1]).

Si on veut éviter les inconvénients de la théorie de Joukowski, on doit chercher d'autres formes du potentiel complémentaire, en tâchant d'obtenir une meilleure concordance des formules avec l'expérience et en fixant encore une condition additionnelle:

IV. $f_1'(Z)$ doit diminuer avec l'augmentation de Z plus rapidement que $\frac{1}{Z}$.

Le premier potentiel de cette espèce fut donné dans les travaux du prof. Witoszyński. Par rapport aux axes x_1, y_1 de la fig. 1 ce potentiel se réduit à l'expression:

$$\frac{8iua^{\frac{3}{2}} \sin\alpha \cdot e^{\frac{i\alpha}{2}}}{Z_1^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}};$$

si on passe aux axes x, y, à l'aide de la formule:

$$Z_1 = Z e^{i\alpha},$$

le potentiel prend la forme:

$$f_1(Z) = \frac{8iua^{\frac{3}{2}} \sin\alpha}{Z^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

---

[1]) Witoszyński, l. c., p. 17—19; voir aussi du même auteur: Modification du principe de circulation, Delft 1925 (Proceedings of the International Congress for Applied Mechanics) p. 1 et 11.

a vitesse complexe correspondante est:

$$f_1'(Z) = -\frac{4iua^{\frac{3}{2}}\sin\alpha}{Z^{\frac{1}{2}}\left(Z^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

En particulier, nous trouvons la vitesse aux points du profil circulaire:

$$V_c = (v_\vartheta + i\,v_r)_{Z=ae^{i\vartheta}} = i\,e^{i\vartheta} f_1'\left(a\,e^{i\vartheta}\right) = \frac{2u\sin\alpha}{1+\cos\frac{\vartheta}{2}}\;; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (29)$$

on admet ici que ϑ varie dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$.

La formule (29) montre que la vitesse V_c n'est pas constante; elle varie entre $u\sin\alpha$ et $2u\sin\alpha$. La répartition de cette vitesse le long de la circonférence est très importante parce qu'elle détermine les vitesses aux points du profil transformé et les forces dont il s'agit. Nous donnons ci-dessous une table des valeurs numériques se rapportant à la formule (29).

ϑ^0	$\frac{V_c}{2u\sin\alpha}$	ϑ^0	$\frac{V_c}{2u\sin\alpha}$	ϑ^0	$\frac{V_c}{2u\sin\alpha}$
−180	1,000	−60	0,536	60	0,536
−170	0,920	−50	0,525	70	0,550
−160	0,852	−40	0,516	80	0,566
−150	0,794	−30	0,509	90	0,586
−140	0,745	−20	0,504	100	0,609
−130	0,703	−10	0,501	110	0,635
−120	0,667	0	0,500	120	0,667
−110	0,635	10	0,501	130	0,703
−100	0,609	20	0,504	140	0,745
−90	0,586	30	0,509	150	0,794
−80	0,566	40	0,516	160	0,852
−70	0,550	50	0,525	170	0,920

La perturbation (27) est une espèce du mouvement cyclique; il n'y a pas de points de vitesse nulle, et le fluide coule autour du cercle sans altérations. Nous apercevons encore une relation caractéristique entre les vitesses aux points A et B, la première étant exactement le double de la seconde. Il sera utile de noter cette propriété qui s'exprime par l'égalité:

$$f_1'(a) = -u\,i\sin\alpha = -\frac{1}{2}\,f_1'(-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

La circulation de la perturbation (27) le long de la circonférence est évidemment différente de zéro. Elle est égale à l'accroissement du potentiel de vitesse Φ ce qui ne diffère pas de l'accroissement du potentiel complexe, puisque la circonférence est une ligne du courant. Nous aurons donc:

$$C = \oint f_1'(Z)\,dZ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (31)$$

où l'intégration doit être exécutée suivant le chemin $ADBCA$ (fig. 1). Il en résulte:

$$C = f_1\left(a e^{\pi i}\right) - f_1\left(a e^{-\pi i}\right) = \frac{8 i u a^{\frac{3}{2}} \sin\alpha}{a^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{\pi i}{2}}+1\right)} - \frac{8 i u a^{\frac{3}{2}} \sin\alpha}{a^{\frac{1}{2}}\left(e^{-\frac{\pi i}{2}}+1\right)} = 8 i u a \sin\alpha\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}\right),$$

ou enfin:

$$C = 8 u a \sin\alpha \, . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

En comparant cette formule avec (23), on voit que la circulation est, dans ce cas, plus faible que la circulation du tourbillon de Joukowski (la différence s'élève à 36⁰/₀).

Si on adjoint la perturbation (27) au mouvement (11), suivant la formule (21), on obtient un mouvement résultant qui peut remplacer, pour nos buts, le mouvement réel; nous obtenons dans ce cas une „couche de discontinuité" (la surface hachurée sur la fig. 1) qui remplace en quelque sorte la couche tourbillonaire qu'on observe dans la réalité. La répartition des vitesses le long du profil transformé, qui correspond à ce mouvement résultant, s'accorde très bien avec les données de l'expérience [1]). On a appliqué aussi la nouvelle forme du potentiel pour calculer les forces qui s'exercent sur quelques uns des profils types; les résultats obtenus sont aussi plus proches de la réalité que ceux fournis par la théorie de Joukowski. En particulier, on obtient la force portante sensiblement diminuée et — ce qui est important — la résistance à l'avancement différente de zéro. Toutes ces questions ont été déjà discutées dans les ouvrages mentionnés, auxquels nous renvoyons le lecteur. Nous nous bornons à calculer les forces d'après la formule première de Blasius seulement pour un cas particulier quand $\frac{dZ}{dz} = 1$, c. à. d. pour le profil circulaire. Ce seront les forces P_{Y1} et P_{X1} d'après la partie gauche de la fig. 1. Il est évident que ces quantités n'ont aucun sens pratique parce que le phénomène du décollement simple ne peut pas avoir lieu dans le cas du profil circulaire. On ne doit même pas les considérer comme des forces réelles mais comme des intégrales caractéristiques dont nous nous servirons pour comparer entre elles différentes expressions analytiques de la fonction f_1.

Pour calculer ces deux quantités dans le cas présent nous introduisons dans la formule (9) les expressions (21′, 11′, 28), en remplaçant simultanément $\frac{dZ}{dz}$ par l'unité. Nous obtenons d'abord les composantes dans les directions X, Y:

$$P_Y - i P_X = -\frac{\sigma}{2}\oint\left[-u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - \frac{4 i u a^{\frac{3}{2}} \sin\alpha}{Z^{\frac{1}{2}}\left(Z^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\right)^2}\right]^2 dZ =$$

$$= -\frac{\sigma u^2}{2}\left[\oint\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right)^2 dZ + 8 i a^{\frac{3}{2}} \sin\alpha \oint\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right)\frac{dZ}{Z^{\frac{1}{2}}\left(Z^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - 16\, a^3 \sin^2\alpha \oint \frac{dZ}{Z\left(Z^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\right)^4}\right].$$

La première intégrale entre les crochets est nulle; les deux suivantes pourront être calculées à l'aide de la substitution:

$$Z^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \zeta \, ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

[1]) Service Technique de l'Aéronautique, Bulletin Technique, № 22, Paris, Décembre 1924, Annexe au chapitre IV.

l'intégration nouvelle sera effectuée dans le plan d'une nouvelle variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$ (fig. 2); le chemin de l'intégration sera la demi-circonférence KLM qui correspond à la circonférence entière $ADBCA$ de la fig. 1. Nous obtiendrons:

$$P_Y - i P_X = 8\,\sigma\, a\, u^2 \sin\alpha \left[2 \sin\alpha \int \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta+1)^4} - i e^{i\alpha} \int \frac{d\zeta}{(\zeta+1)^2} + i e^{-i\alpha} \int \frac{d\zeta}{\zeta^4(\zeta+1)^2} \right].$$

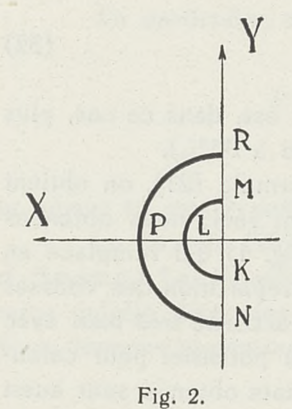


Fig. 2.

Au lieu du chemin de l'intégration KLM on peut prendre le chemin $KNPRM$, car les fonctions à intégrer ne possèdent pas de pôles dans le domaine compris entre ces deux lignes. Le rayon de la demi-circonférence NPR est arbitraire; il peut être augmenté indéfiniment ce qui annule les parties des intégrales prises le long de cette demi-circonférence. Il ne restera que les intégrales le long des segments KN et RM qui sont des simples intégrales définies. Or, les valeurs des intégrales indéfinies aux points N et R tendent toutes les deux vers zéro quand ces deux points s'éloignent infiniment; il suffira donc de calculer la différence des valeurs de toutes les intégrales indéfinies aux points M et K. Nous trouverons:

$$P_Y - i P_X = 8\,\sigma\, a\, u^2 \sin\alpha \left| 2 \sin\alpha \left[\lg \frac{\zeta}{\zeta+1} + \frac{6\zeta^2 + 15\zeta + 11}{6(\zeta+1)^3} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{i e^{i\alpha}}{\zeta+1} + i e^{-i\alpha} \left[4 \lg \frac{\zeta+1}{\zeta} - \frac{12\zeta^3 + 6\zeta^2 - 2\zeta + 1}{3\zeta^3(\zeta+1)} \right] \right|_{-i}^{+i} =$$

$$= 8\,\sigma\, a\, u^2 \sin\alpha \left[\left(2\pi - \frac{16}{3} \right) \cos\alpha + i(4 - \pi) \sin\alpha \right],$$

d'où:

$$P_Y = 16 \left(\pi - \frac{8}{3} \right) \sigma\, a\, u^2 \sin\alpha \cos\alpha\,, \quad (34)$$

$$P_X = 8(\pi - 4)\, \sigma\, a\, u^2 \sin^2\alpha\,. \quad (34')$$

Nous passons ensuite aux composantes P_{Y1} et P_{X1}:

$$P_{Y1} - i P_{X1} = e^{-i\alpha}(P_Y - i P_X) = 16\,\sigma\, a\, u^2 \sin\alpha \left[\pi - \frac{8}{3} + \left(\frac{28}{3} - 3\pi \right) \sin^2\alpha \right] -$$

$$- 8\, i\, \sigma\, a\, u^2 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \left(3\pi - \frac{28}{3} \right);$$

comme l'angle α est petit, nous pouvons négliger les puissances supérieures de $\sin\alpha$ à partir de $\sin^3\alpha$; nous obtiendrons les quantités cherchées:

$$P_{Y1} \cong 16 \left(\pi - \frac{8}{3} \right) \sigma\, a\, u^2 \sin\alpha \cong 7{,}60\, \sigma\, a\, u^2 \sin\alpha\,; \quad (35)$$

$$P_{X1} \cong 8 \left(3\pi - \frac{28}{3} \right) \sigma\, a\, u^2 \sin^2\alpha \cong 0{,}732\, \sigma\, a\, u^2 \sin^2\alpha\,. \quad (35')$$

Il importe de remarquer que nous avons trouvé plus haut, d'après Joukowski, la relation bien connue: $P_{Y1} = \sigma u C$ (voir la formule 26) tandis que nous avons maintenant, en vertu de (32) et (35), une relation un peu différente:

$$P_{Y1} \cong 0{,}95\, \sigma u C\,. \quad (36)$$

§ 3.

Le calcul, que nous venons d'achever, se rapportait au cas le plus simple où $\frac{dZ}{dz} = 1$, mais il était tout de même assez difficile. Si on voulait calculer la force portante et la résistance pour un profil transformé, on devrait tenir compte de ce facteur $\frac{dZ}{dz}$ qui s'exprime par la formule générale (7'). Les difficultés qui en résultent sont excessives; certes, on peut les surmonter dans les cas particuliers au prix des grands efforts. Mais il est peu probable qu'on puisse obtenir de cette manière quelques indications pratiques concernant l'influence de la forme du profil sur la grandeur des forces et sur leur rapport mutuel. Des complications de calcul obscurcissent la nature inconnue de ces relations cherchées. Cela constitue un défaut sérieux du potentiel (27). Il serait donc bien désirable de trouver une autre forme du potentiel complémentaire qui donnerait presque la même répartition des vitesses sur le profil ainsi que les valeurs des forces; mais cette nouvelle forme du potentiel doit contenir — au lieu des puissances fractionnaires de Z — d'autres fonctions dont les intégrales puissent être calculées plus facilement.

Le potentiel complémentaire $f_1(Z)$ ne peut pas se réduire à une fonction rationnelle, il sera multiforme — de même que (22) ou (27). Quelques remarques à propos des potentiels de ce genre seront peut être utiles. Pourqu'un tel potentiel représente un mouvement du fluide, on doit convenir de ne considérer qu'une certaine de ses „déterminations", celle correspondante à un certain feuillet de Riemann. On admet, par conséquent, que la fonction présente une discontinuité le long d'une „coupure". C'est pourquoi nous disons quelquefois que le potentiel complémentaire est *discontinu*, ce qui n'est pas tout à fait exact.

Il est nécessaire de distinguer le cas où le potentiel est multiforme tandis que sa premiére dérivée (la vitesse complexe) reste uniforme; c'est ce qui a lieu, par exemple, pour le potentiel de Joukowski (voir les formules 22 et 24). Il est évident que le potentiel de ce genre représente le même mouvement dans tous les feuillets de Riemann; la discontinuité n'existe pas, et toutes les conventions additionnelles sont superflues.

Quant au potentiel (27), il possède deux déterminations différentes, de même que sa première dérivée (28). Nous en avons pris une seule en fixant l'intervalle de variation de l'angle ϑ.

Nous allons maintenant choisir d'autres formes du potentiel complémentaire. Certaines réflexions nous suggèrent l'idée qu'il est possible d'établir le potentiel demandé à l'aide de la fonction logarithmique. Nous savons qu'une simple fonction telle que

$$w = k \cdot \lg \frac{Z - Z_0}{a}$$

représente une source isolée, si le coefficient k est réel, ou un tourbillon isolé, si ce coefficient est imaginaire. Nous pouvons exclure les sources, car il n'est pas admissible que le fluide naisse ou disparaisse dans l'espace considéré. Un tourbillon unique constitue la base de la théorie de Joukowski que nous avons rejetée. Donc il est clair que nous devons étudier en premier lieu des *systèmes de tourbillons*.

Rappelons que le potentiel cherché doit remplir les conditions I, II, III et IV. Or, la condition II n'exige que le choix convenable d'un coefficient; les autres conditions serons satisfaites, si on groupe des tourbillons deux à deux de sorte que les tourbillons de chaque paire soient les images l'un de l'autre par rapport au cercle primitif. Nous écrirons donc le potentiel f_1 sous la forme suivante [1]) :

---

[1]) Les deux tourbillons de chaque paire possèdent des circulations égales avec signes contraires; leurs centres se trouvent en inversion par rapport au cercle primitif. Voir: Lamb, Hydrodynamics, Cambridge University Press, 1906, §§ 64 et 155. Ce qui concerne la condition de l'énergie cinétique finie, elle est remplie conformément au renvoi de la page 43.

$$f_1(Z) = \sum_\nu \left[\frac{C_\nu i}{2\pi} \lg \frac{Z - R_\nu e^{i\Theta_\nu}}{a} - \frac{C_\nu i}{2\pi} \lg \frac{Z - \frac{a^2}{R_\nu} e^{i\Theta_\nu}}{a} \right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

$R_\nu e^{i\Theta_\nu}$ et $\frac{a^2}{R_\nu} e^{i\Theta_\nu}$ désignent les centres de deux tourbillons dont le premier est situé à l'extérieur du cercle, le second — à l'intérieur (nous supposons que $R_\nu > a$, donc $\frac{a^2}{R_\nu} < a$). La combinaison des signes employée dans la formule (37) correspond au cas typique où les tourbillons intérieurs ont une circulation positive; la circulation totale le long de la circonférence est égale à la somme des circulations de ces tourbillons intérieurs, elle sera donc positive de même que (23) et (32).

L'expression (37) est encore très générale; elle peut représenter une quantité finie ou infinie de tourbillons dont la disposition et l'intensité sont arbitraires. Il s'agit d'un choix rationnel parmi cette multiplicité. Or, nous devons tenir compte de la condition II qui se réduit à la formule (19) et des formules (30, 32, 35 et 35') qui sont les conséquences de la théorie du prof. Witoszyński et qui doivent être satisfaites afin que le potentiel (37) puisse remplacer (27). Il y a donc en total *cinq* conditions à remplir. Mais il faut remarquer que les conditions (32) et (35) sont presque équivalentes; en effet, les formules (26) et (36) montrent qu'il existe une proportionnalité presqu'exacte entre la circulation C et la force portante P_{Y1}. Il suffit donc de se borner à la première des conditions (32) et (35), puisqu'elle est plus simple. Il ne reste ainsi que *quatre* conditions à remplir, et nous devons disposer au moins de la même quantité de constantes dans l'expression du potentiel. Chaque paire de tourbillons s'exprime à l'aide de trois constantes (C_ν, R_ν, Θ_ν). Par conséquent, deux paires au moins sont nécessaires pour nos buts. Nous parvenons de cette manière à ce que nous appellerons „le potentiel de quatre tourbillons". Les §§ 4, 5 et 6 du présent travail sont consacrés à l'étude de ce potentiel et des conséquences qui en résultent.

§ 4.

Le potentiel de quatre tourbillons dans sa forme générale s'exprime à l'aide de six constantes, tandis que nous avons seulement quatre conditions à remplir. Il est donc permis

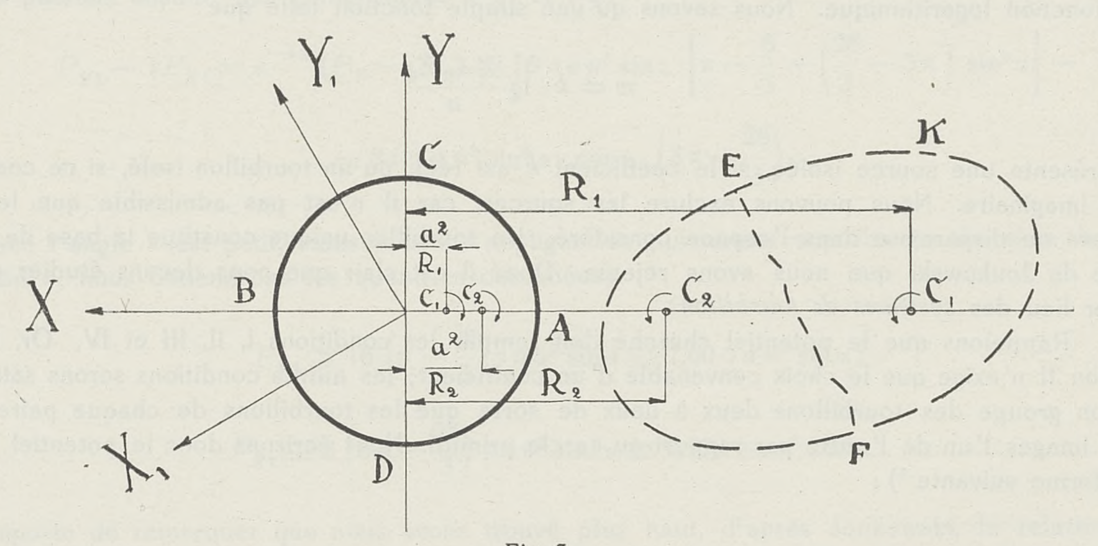


Fig. 3.

de choisir arbitrairement deux constantes. Nous admettons que les centres de tous les tourbillons sont situés sur l'axe X, du côté négatif de cet axe (fig. 3). Une telle supposition simplifie le

calcul considérablement; en même temps, elle s'accorde avec notre idée de la perturbation complémentaire qui doit se manifester précisément à l'arrière du profil.

Nous aurons donc dans la formule (37) pour $\nu = 1$ et $\nu = 2$ respectivement $\Theta_1 = \pi$ et $\Theta_2 = \pi$. Nous introduisons encore les notations: $R_1 = ma$ et $R_2 = na$; le potentiel cherché prendra la forme suivante:

$$f_1(Z) = \frac{C_1 i}{2\pi}\left(\lg\frac{Z+ma}{a} - \lg\frac{Z+\frac{a}{m}}{a}\right) + \frac{C_2 i}{2\pi}\left(\lg\frac{Z+na}{a} - \lg\frac{Z+\frac{a}{n}}{a}\right); \quad . \quad . \quad (38)$$

la vitesse complexe correspondante sera:

$$f_1'(Z) = \frac{C_1 i}{2\pi}\left(\frac{1}{Z+ma} - \frac{1}{Z+\frac{a}{m}}\right) + \frac{C_2 i}{2\pi}\left(\frac{1}{Z+na} - \frac{1}{Z+\frac{a}{n}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (38')$$

Il est important de remarquer que cette vitesse est une fonction uniforme.

En faisant varier les quatre constantes (C_1, C_2, m, n) nous pouvons modifier largement les propriétés du système. Nous allons choisir ces constantes de manière que les conditions (19, 30, 32 et 35') soient remplies. Nous aurons d'abord, en vertu de (32):

$$C = C_1 + C_2 = 8ua\sin\alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

cette égalité peut être remplacée par les deux suivantes:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 8\lambda u a \sin\alpha \\ C_2 &= 8(1-\lambda) u a \sin\alpha \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

nous éliminons de cette manière les deux constantes C_1 et C_2, en introduisant à leur place le paramètre abstrait λ.

La vitesse complexe (38') s'exprimera maintenant comme suit:

$$f_1'(Z) = \frac{4uai\sin\alpha}{\pi}\left(\frac{\lambda}{Z+ma} - \frac{\lambda}{Z+\frac{a}{m}} + \frac{1-\lambda}{Z+na} - \frac{1-\lambda}{Z+\frac{a}{n}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

et la vitesse aux points du profil circulaire — d'une façon analogue à (25) et (29):

$$V_c = i e^{i\vartheta} f_1'\left(a e^{i\vartheta}\right) = \frac{4u\sin\alpha}{\pi}\left[\frac{\lambda(m^2-1)}{m^2+2m\cos\vartheta+1} + \frac{(1-\lambda)(n^2-1)}{n^2+2n\cos\vartheta+1}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

L'expression (41) introduite dans les formules (19, 30) donne:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\frac{m+1}{m-1} + (1-\lambda)\frac{n+1}{n-1} &= \frac{\pi}{2} \\ \lambda\frac{m-1}{m+1} + (1-\lambda)\frac{n-1}{n+1} &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

En résolvant ce système d'équations par rapport à n et λ, nous trouvons:

$$n = \frac{\pi(m-3)-8}{\pi(3m-1)-8m}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

$$\lambda = \frac{\pi^2-8}{2} \cdot \frac{m^2-1}{\pi(3m^2-2m+3)-8(m^2-1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Il ne nous reste ainsi qu'un seul paramètre indépendant m; celui-ci doit être choisi de manière que la dernière condition (35′) soit aussi satisfaite. Pour exprimer cette condition nous cherchons d'abord la vitesse complexe $f'(Z)$ du mouvement résultant suivant les formules (21′, 11′, 41):

$$f'(Z) = u\left[-e^{i\alpha} + \frac{a^2}{Z^2}e^{-i\alpha} - \frac{4\lambda a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+\frac{a}{m}} - \frac{4(1-\lambda)a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+\frac{a}{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\lambda a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+ma} + \frac{4(1-\lambda)a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+na}\right], \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

puis la première intégrale de Blasius (9) que nous multiplions, tout de suite, par $e^{-i\alpha}$ afin d'obtenir immédiatement les forces composantes dans la direction des axes X_1, Y_1 (fig. 3):

$$P_{Y1} - iP_{X1} = -\frac{\sigma}{2}e^{-i\alpha}\oint_{(ADBCA)}[f'(Z)]^2\,dZ \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

L'intégrale ci-dessus doit être prise le long de la circonférence; cependant nous pourrons choisir un autre chemin d'intégration en nous basant sur le raisonnement suivant. Si on développe la fonction (46) suivant les puissances négatives de Z, le terme contenant Z^{-1} s'annule; la fonction à intégrer dans la formule (47) possède la même propriété. Le résidu de cette fonction relatif au point à l'infini est donc nul. Par conséquent l'intégrale (47) est égale à l'intégrale de la même fonction calculée le long d'un contour arbitraire K, contournant les centres des tourbillons extérieurs et prise avec le signe contraire [1]).

Nous obtenons ainsi:

$$P_{Y1} - iP_{X1} = \frac{\sigma}{2}e^{-i\alpha}\oint_{(K)}[f'(Z)]^2\,dZ = \frac{\sigma u^2 e^{-i\alpha}}{2}\oint_{(K)}\left\{\left[-e^{i\alpha} - \frac{a^2}{Z^2}e^{-i\alpha} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{4\lambda a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+\frac{a}{m}} - \frac{4(1-\lambda)a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+\frac{a}{n}}\right] + \left[\frac{4\lambda a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+ma} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{4(1-\lambda)a i \sin\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{Z+na}\right]\right\}^2 dZ \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

[1]) Goursat, Cours d'analyse mathématique, Paris 1918, t. II, § 310, p. 129.

La fonction à intégrer est le carré du binome. Le carré du premier terme donne un résidu nul, car ce terme ne possède pas de points singuliers à l'intérieur du contour K; le carré du second terme donne aussi une valeur nulle, ce qu'on peut vérifier, en décomposant ce terme en fractions simples ou bien en divisant le contour, à l'aide d'une transversale EF, en deux contours le long desquels nous obtenons les intégrales qui ne diffèrent que par leurs signes. Il suffira donc de calculer l'intégrale du produit double de ces deux termes:

$$P_{Y1} - i P_{X1} = \sigma u^2 \frac{4 a i \sin\alpha}{\pi} \oint_{(K)} \left(\frac{\lambda}{Z + m a} + \frac{1-\lambda}{Z + n a} \right) \cdot \left[-1 + \frac{a^2}{Z^2} e^{-2i\alpha} - \frac{4 \lambda a i \sin\alpha}{\pi} \cdot \frac{e^{-i\alpha}}{Z + \frac{a}{m}} - \right.$$

$$\left. - \frac{4(1-\lambda) a i \sin\alpha}{\pi} \cdot \frac{e^{-i\alpha}}{Z + \frac{a}{n}} \right] d Z = \frac{4 \sigma a u^2 i \sin\alpha}{\pi} \oint_{(K)} \left(\frac{\lambda}{Z + m a} + \frac{1-\lambda}{Z + n a} \right) \varphi(Z)\, d Z\,, \quad (49)$$

où on a posé pour abréger:

$$\varphi(Z) = -1 + \frac{a^2}{Z^2} e^{-2i\alpha} - \frac{4 \lambda a i \sin\alpha}{\pi} \cdot \frac{e^{-i\alpha}}{Z + \frac{a}{m}} - \frac{4(1-\lambda) a i \sin\alpha}{\pi} \cdot \frac{e^{-i\alpha}}{Z + \frac{a}{n}} \quad . \quad . \quad (50)$$

Nous trouvons ensuite:

$$P_{Y1} - i P_{X1} = \frac{4 \sigma a u^2 i \sin\alpha}{\pi} \left[\lambda \cdot 2\pi i \cdot \varphi(-ma) + (1-\lambda) \cdot 2\pi i \cdot \varphi(-na) \right] =$$

$$= - 8 \sigma a u^2 \sin\alpha \left\{ \lambda \left[-1 + \frac{e^{-2i\alpha}}{m^2} + \frac{4 \lambda m i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (m^2 - 1)} + \frac{4(1-\lambda) n i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (m n - 1)} \right] + \right.$$

$$\left. + (1-\lambda) \left[-1 + \frac{e^{-2i\alpha}}{n^2} + \frac{4 \lambda m i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (m n - 1)} + \frac{4(1-\lambda) n i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (n^2 - 1)} \right] \right\},$$

d'où:

$$P_{Y1} = 8 \sigma a u^2 \sin\alpha \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{m^2} - \frac{1-\lambda}{n^2} \right); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$P_{X1} = \frac{32 \sigma a u^2 \sin^2\alpha}{\pi} \left[\frac{\lambda^2 m}{m^2 - 1} + \frac{(1-\lambda)^2 n}{n^2 - 1} + \frac{\lambda (1-\lambda)(m+n)}{m n - 1} - \frac{\pi \lambda}{2 m^2} - \frac{\pi (1-\lambda)}{2 n^2} \right]; \quad (51')$$

nous avons négligé les termes très petits de même qu'on l'a fait à la fin du § 2.

La valeur trouvée de P_{X1} doit satisfaire à la condition (35'); il en résulte:

$$\frac{\lambda^2 m}{m^2 - 1} + \frac{(1-\lambda)^2 n}{n^2 - 1} + \frac{\lambda (1-\lambda)(m+n)}{m n - 1} - \frac{\pi \lambda}{2 m^2} - \frac{\pi (1-\lambda)}{2 n^2} = \frac{3}{4} \pi^2 - \frac{7}{3} \pi = 0{,}0719. \quad (52)$$

Nous avons maintenant le système des équations (44, 45, 52) à résoudre. On parvient au but le plus facilement, en choisissant successivement différentes valeurs de m, en déterminant ensuite n et λ et en introduisant ces valeurs dans (52). Après avoir effectué plusieurs essais on trouve la solution unique suivante (des valeurs approchées):

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 11{,}4 \\ n = 1{,}4 \\ \lambda = 0{,}92 \end{array}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Si on substitue les valeurs trouvées dans la formule (51), on obtient la valeur de P_{Y_1} qui s'accorde très bien avec (35), ce que nous avons prévu. On voit que le potentiel de quatre tourbillons peut remplacer le potentiel de la couche de discontinuité (27) avec une exactitude parfaite. Certes, cela ne se rapporte qu'à la répartition des vitesses et des pressions le long du profil; quant aux lignes du courant, elles sont peu ressemblantes dans les deux cas. Au lieu de la couche de discontinuité il n'y a que deux points singuliers ($Z = -ma$ et $Z = -na$ dans le plan Z).

Pour comparer les deux potentiels nous donnons ci-dessous le tableau des vitesses sur le profil circulaire, calculées d'après la formule (42) qui, en vertu de (53), prend la forme:

$$V_c = 2u \sin\alpha \left(\frac{3{,}31}{5{,}74 + \cos\vartheta} + \frac{0{,}0174}{1{,}057 + \cos\vartheta} \right); \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

ce tableau est analogue à celui de la page 44:

ϑ^0	$\frac{V_c}{2u \sin\alpha}$	ϑ^0	$\frac{V_c}{2u \sin\alpha}$	ϑ^0	$\frac{V_c}{2u \sin\alpha}$
−180	1,004	−60	0,542	60	0,542
−170	0,938	−50	0,529	70	0,557
−160	0,838	−40	0,518	80	0,574
−150	0,771	−30	0,510	90	0,593
−140	0,725	−20	0,504	100	0,614
−130	0,692	−10	0,501	110	0,638
−120	0,663	0	0,500	120	0,663
−110	0,638	10	0,501	130	0,692
−100	0,614	20	0,504	140	0,725
−90	0 593	30	0,510	150	0,771
−80	0,574	40	0,518	160	0,838
−70	0,557	50	0,529	170	0,938

En comparant les deux tableaux, on constate une concordance parfaite. Certes, on pourrait rendre les écarts encore plus petits, en modifiant quelque peu les nombres (53); mais une exactitude exagerée ne présente ici aucune importance, car la formule (29) n'est pas elle-même exacte; en outre, les erreurs d'essais dépassent les erreurs de notre calcul.

§ 5.

Nous allons appliquer maintenant la première formule de Blasius dans sa forme générale (9) pour déduire les formules exprimant la force portante et la résistance à l'avancement du profil transformé muni d'une pointe. Le facteur $\frac{dZ}{dz}$, qui était égal à 1 dans le cas du profil circulaire, sera maintenant une fonction de Z selon (7'). C'est justement ce facteur qui indique l'influence de la forme du profil sur les valeurs des forces. Il est commode d'adopter les notations suivantes:

$$\frac{dZ}{dz} = p(Z); \quad \frac{dp(Z)}{dZ} = p'(Z). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Nous introduisons donc le facteur $p(Z)$ dans la formule (48) en remplaçant simultanément $(P_{Y1} - iP_{X1})$ par $(P_{y1} - iP_{x1})$ et en utilisant l'abréviation (50); nous obtiendrons:

$$P_{y1} - iP_{x1} = \frac{\sigma u^2 e^{-i\alpha}}{2} \oint_{(K)} \left[e^{i\alpha} \varphi(Z) + \frac{4ai\sin\alpha}{\pi} \left(\frac{\lambda}{Z+ma} + \frac{1-\lambda}{Z+na} \right) \right]^2 p(Z)\, dZ; \quad (56)$$

l' intégrale doit être calculée de nouveau le long du contour K à l'intérieur duquel aucune des fonctions $\varphi(Z)$ et $p(Z)$ ne possède de points singuliers. Nous pouvons diviser cette intégrale en trois parties qui sont les suivantes:

$$J_1 = \oint_{(K)} \left[e^{i\alpha} \cdot \varphi(Z) \right]^2 p(Z)\, dZ = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

$$J_2 = 2e^{i\alpha} \frac{4ai\sin\alpha}{\pi} \oint_{(K)} \left(\frac{\lambda}{Z+ma} + \frac{1-\lambda}{Z+na} \right) \cdot \varphi(Z) \cdot p(Z) \cdot dZ =$$

$$= \frac{8aie^{i\alpha}\sin\alpha}{\pi} \left[\lambda \cdot 2\pi i \cdot \varphi(-ma) \cdot p(-ma) + (1-\lambda) \cdot 2\pi i \cdot \varphi(-na) \cdot p(-na) \right] =$$

$$- 16ae^{i\alpha}\sin\alpha \left[\lambda \cdot \varphi(-ma) \cdot p(-ma) + (1-\lambda) \cdot \varphi(-na) \cdot p(-na) \right]; \quad \ldots \quad (58)$$

$$J_3 = -\frac{16a^2\sin^2\alpha}{\pi^2} \oint_{(K)} \left[\frac{\lambda^2}{(Z+ma)^2} + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(Z+ma)(Z+na)} + \frac{(1-\lambda)^2}{(Z+na)^2} \right] p(Z)\, dZ =$$

$$= -\frac{16a^2\sin^2\alpha}{\pi^2} \left[\lambda^2 \cdot 2\pi i \cdot p'(-ma) + (1-\lambda)^2 \cdot 2\pi i \cdot p'(-na) + 2\lambda(1-\lambda) \cdot 2\pi i \cdot \frac{p(-ma)}{na-ma} + \right.$$

$$\left. + 2\lambda(1-\lambda) \cdot 2\pi i \cdot \frac{p(-na)}{ma-na} \right] =$$

$$= -\frac{32ia\sin^2\alpha}{\pi} \left[\lambda^2 a \cdot p'(-ma) + (1-\lambda)^2 a \cdot p'(-na) + 2\lambda(1-\lambda) \frac{p(-na) - p(-ma)}{m-n} \right]. \quad (59)$$

En examinant les expressions (58) et (59), nous observons qu'elles contiennent les fonctions $p(Z)$ et $p'(Z)$; mais, ce qui est remarquable, il n'y entre que les valeurs spéciales de ces fonctions, correspondant à deux valeurs spéciales de la variable complexe: $Z = -ma = -11{,}4a$ et $Z = -na = -1{,}4a$.

Les notations suivantes seront utiles:

$$\left. \begin{aligned} p(-ma) &= p(-11{,}4a) = E - Fi \\ p(-na) &= p(-1{,}4a) = G - Hi \\ a \cdot p'(-ma) &= a \cdot p'(-11{,}4a) = K - Li \\ a \cdot p'(-na) &= a \cdot p'(-1{,}4a) = M - Ni \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Nous tirons ensuite de (56 ÷ 59), en tenant compte de (50):

$$P_{y1} - i P_{x1} = \frac{\sigma u^2 e^{-i\alpha}}{2} (J_1 + J_2 + J_3) = -8 \sigma a u^2 \sin\alpha \left\{ \lambda (E - Fi) \cdot \left[-1 + \frac{e^{-2i\alpha}}{m^2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{4\lambda m i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (m^2-1)} + \frac{4(1-\lambda) n i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (mn-1)} \right] +$$

$$\left. + (1-\lambda)(G - Hi) \left[-1 + \frac{e^{-2i\alpha}}{n^2} + \frac{4\lambda m i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (mn-1)} + \frac{4(1-\lambda) n i e^{-i\alpha} \sin\alpha}{\pi (n^2-1)} \right] \right\} -$$

$$- \frac{16 \sigma a u^2 i e^{-i\alpha} \sin^2\alpha}{\pi} \left[\lambda^2 (K - Li) + (1-\lambda)^2 (M - Ni) + 2\lambda(1-\lambda) \frac{(G-E) - (H-F) i}{m-n} \right].$$

Il ne reste qu'à séparer la partie réelle et imaginaire; en négligeant les termes très petits, nous obtenons:

$$P_{y1} = 8 \sigma a u^2 \left\{ \sin\alpha \left[\lambda \frac{m^2-1}{m^2} E + (1-\lambda) \frac{n^2-1}{n^2} G \right] - \sin^2\alpha \left[\left(\frac{4\lambda^2 m}{\pi (m^2-1)} + \frac{4\lambda(1-\lambda) n}{\pi (mn-1)} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{2\lambda}{m^2} - \frac{4\lambda(1-\lambda)}{\pi (m-n)} \right) F + \left(\frac{4\lambda(1-\lambda) m}{\pi (mn-1)} + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{4(1-\lambda)^2 n}{\pi (n^2-1)} - \frac{2(1-\lambda)}{n^2} + \frac{4\lambda(1-\lambda)}{\pi (m-n)} \right) H + \frac{2\lambda^2}{\pi} L + \frac{2(1-\lambda)^2}{\pi} N \right] \right\}; \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

$$P_{x1} = 8 \sigma a u^2 \left\{ \sin\alpha \left[\lambda \frac{m^2-1}{m^2} F + (1-\lambda) \frac{n^2-1}{n^2} H \right] + \sin^2\alpha \left[\left(\frac{4\lambda^2 m}{\pi (m^2-1)} + \frac{4\lambda(1-\lambda) n}{\pi (mn-1)} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{2\lambda}{m^2} - \frac{4\lambda(1-\lambda)}{\pi (m-n)} \right) E + \left(\frac{4\lambda(1-\lambda) m}{\pi (mn-1)} + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{4(1-\lambda)^2 n}{\pi (n^2-1)} - \frac{2(1-\lambda)}{n^2} + \frac{4\lambda(1-\lambda)}{\pi (m-n)} \right) G + \frac{2\lambda^2}{\pi} K + \frac{2(1-\lambda)^2}{\pi} M \right] \right\}. \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Ces formules subiront une simplification considérable, si l'on introduit les valeurs numériques (53); nous trouverons:

$$\boxed{\begin{aligned} P_{y1} = 8 \sigma a u^2 [(0{,}9129\, E + 0{,}0392\, G) \sin\alpha - (0{,}0805\, F + \\ + 0{,}0110\, H + 0{,}5388\, L + 0{,}0041\, N) \sin^2\alpha]. \end{aligned}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{x1} = 8 \sigma a u^2 [(0{,}9129\, F + 0{,}0392\, H) \sin\alpha + (0{,}0805\, E + \\ + 0{,}0110\, G + 0{,}5388\, K + 0{,}0041\, M) \sin^2\alpha]. \end{aligned}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Les formules (63, 64) constituent la solution du problème que nous avons posé dans le § 1. Il est nécessaire de remarquer pourtant qu'il peut exister une quantité d'autres solutions

équivalentes que l'on obtiendrait, si l'on prenait pour base du calcul d'autres formes du potentiel complémentaire.

Il n'est pas possible d'évaluer à présent l'utilité de nos formules pour les applications techniques. Leur simplicité est frappante, mais ce n'est qu'une apparence, puisque la nature des nombres E, F, G, H, K, L, M, N, définis par (60), n'est pas assez claire. Une discussion détaillé et difficile serait nécessaire, si l'on voulait éclaircir les relations cachées entre la forme du profil et les valeurs de ces nombres. Le but final d'une telle discussion, qui se réduit à la recherche des profils les plus avantageux, est certainement loin d'être atteint.

Nous nous bornons à donner dans la suite quelques exemples et certaines indications générales fort insuffisantes. Nous rappelons au lecteur le fait que les résultats numériques de nos formules ne se rapportent qu'à l'aile d'envergure infinie et ne tiennent pas compte du frottement superficiel. Par conséquent, c'est seulement la force portante qui devrait s'accorder approximativement avec la formule (63); quant à la résistance à l'avancement d'une aile réelle, elle est toujours plus grande que l'expression (64), et il faudrait introduire l'influence de la longueur finie de l'aile ainsi que la résistance additionnelle due au frottement pour obtenir ici la concordance désirable. Cette imperfection de nos formules n'empêche pas qu'on les prenne comme base dans l'étude des propriétés aérodynamiques des profils; en effet, si nous réussirons à trouver les profils dont la résistance selon (64) soit diminuée, leur résistance totale sera probablement aussi diminuée.

§ 6.

Nous allons exécuter maintenant le calcul numérique des forces d'après les formules (63, 64) pour quelques profils connus. Nous choisissons les profils de Joukowski dont la fonction de représentation a la forme [1]):

$$z = \frac{(Z+a)^2}{Z+k a e^{i\mu}}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

la dérivée de cette fonction est:

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{(Z+a)\left[Z+(2k e^{i\mu}-1)a\right]}{\left(Z+k a e^{i\mu}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

Les fonctions $p(Z)$ et $p'(Z)$ seront, en vertu de (55):

$$p(Z) = \frac{\left(Z+k a e^{i\mu}\right)^2}{(Z+a)\left[Z+(2k e^{i\mu}-1)a\right]} = 1 + \frac{(k e^{i\mu}-1)a}{2}\left[\frac{1}{Z+a} - \frac{1}{Z+(2k e^{i\mu}-1)a}\right]; \quad (67)$$

$$p'(Z) = \frac{\left(1-k e^{i\mu}\right)a}{2}\left\{\frac{1}{(Z+a)^2} - \frac{1}{\left[Z+(2k e^{i\mu}-1)a\right]^2}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (68)$$

Nous trouvons ensuite les expressions complexes $E-Fi$ et $K-Li$ d'après (60):

$$E-Fi = p(-ma) = 1 - \frac{1-k e^{i\mu}}{2}\cdot\left[\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1-2k e^{i\mu}}\right],$$

---

[1]) Witoszyński, La Mécanique des profils d'aviation, p. 38, form. 2.

$$K - Li = a \cdot p'(-ma) = \frac{1 - k e^{i\mu}}{2} \left[\frac{1}{(m-1)^2} - \frac{1}{\left(m+1-2ke^{i\mu}\right)^2} \right],$$

d'où :

$$E = 1 + \frac{1 - k \cos\mu}{2(m-1)} - \frac{m + 2k^2 + 1 - (m+3) k \cos\mu}{2[(m+1)^2 - 4k(m+1)\cos\mu + 4k^2]}; \quad \ldots \ldots \quad (69)$$

$$F = \frac{k \sin\mu}{2(m-1)} - \frac{(m-1) k \sin\mu}{2[(m+1)^2 - 4k(m+1)\cos\mu + 4k^2]}; \quad \ldots \ldots \quad (70)$$

$$K = \frac{1 - k \cos\mu}{2(m-1)^2} - \frac{4(m+1)k^2 + (m+1)^2 - k(m^2 + 6m + 5 + 4k^2)\cos\mu + 4k^2 \cos 2\mu}{2[(m+1)^2 - 4k(m+1)\cos\mu + 4k^2]^2}; \quad (71)$$

$$L = \frac{k \sin\mu}{2(m-1)^2} - \frac{k(m^2 - 2m - 3 - 4k^2)\sin\mu + 4k^2 \sin 2\mu}{2[(m+1)^2 - 4k(m+1)\cos\mu + 4k^2]^2}. \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

En remplaçant dans les formules ($69 \div 72$) m par n, nous obtenons les coefficients restants G, H, M, N. Nous introduisons ensuite les valeurs de m et n, tirées de (53), et nous arrivons ainsi aux formules suivantes qui ne contiennent que les variables k et μ, caractéristiques pour les profils de Joukowski :

$$E = \frac{83}{104} - \frac{5}{104} k \cos\mu + \frac{13(31 - 5k\cos\mu)}{2(961 - 310k\cos\mu + 25k^2)}; \quad \ldots \ldots \quad (73)$$

$$F = k \sin\mu \left[\frac{5}{104} - \frac{65}{2(961 - 310k\cos\mu + 25k^2)} \right]; \quad \ldots \ldots \quad (74)$$

$$G = 2 - \frac{5}{4} k \cos\mu + \frac{6 - 5k\cos\mu}{4(36 - 60k\cos\mu + 25k^2)}; \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

$$H = k \sin\mu \left[\frac{5}{4} - \frac{5}{4(36 - 60k\cos\mu + 25k^2} \right]; \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

$$K = \frac{25(1 - k\cos\mu)}{5408} - \frac{25[961 - 1271k\cos\mu + k^2(310 + 25\cos 2\mu) - 25k^3\cos\mu]}{8(961 - 310k\cos\mu + 25k^2)^2}; \quad (77)$$

$$L = k \sin\mu \left[\frac{25}{5408} - \frac{25(651 + 50k\cos\mu - 25k^2)}{8(961 - 310k\cos\mu + 25k^2)^2} \right]; \quad \ldots \ldots \quad (78)$$

$$M = \frac{25(1 - k\cos\mu)}{8} - \frac{25[36 - 96k\cos\mu + k^2(60 + 25\cos 2\mu) - 25k^3\cos\mu]}{8(36 - 60k\cos\mu + 25k^2)^2}; \ldots \quad (79)$$

$$N = k \sin\mu \left[\frac{25}{8} - \frac{25(24 - 50k\cos\mu + 25k^2)}{8(36 - 60k\cos\mu + 25k^2)^2} \right]. \quad \ldots \ldots \quad (80)$$

Voici quelques cas particuliers.

1-o. Les profils symétriques ($\mu = 0$) :

$$F = H = L = N = 0; \quad E = \frac{83}{104} - \frac{5}{104} k + \frac{13}{2(31 - 5k)}; \quad G = 2 - \frac{5}{4} k + \frac{1}{4(6 - 5k)};$$

$$K = \frac{25(1-k)}{5408} - \frac{25(1-k)}{8(31-5k)^2}; \quad M = \frac{25(1-k)}{8} - \frac{25(1-k)}{8(6-5k)^2}.$$

$$P_{y1} = 8\sigma a u^2 \left(0{,}8070 - 0{,}0929k + \frac{5{,}934}{31-5k} - \frac{0{,}0098}{6-5k}\right) \sin\alpha\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

$$P_{x1} = 8\sigma a u^2 \left[0{,}1015 - 0{,}0329\,k + \frac{14{,}538 - 0{,}933\,k}{(31-5k)^2} + \frac{0{,}004 - 0{,}0012\,k}{(6-5k)^2}\right] \sin^2\alpha\,. \quad . \quad (82)$$

En particulier, pour $k = 0{,}1$ (profil № 9) [1]):

$$P_{y1} = 8\sigma a u^2 \cdot 0{,}9940 \sin\alpha \cong 0{,}994\,\sigma u C\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81\text{a})$$

$$P_{x1} = 8\sigma a u^2 \cdot 0{,}1138 \sin^2\alpha\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82\text{a})$$

pour $k = 0{,}2$ (profil № 16) [2]):

$$P_{y1} = 8\sigma a u^2 \cdot 0{,}9882 \sin\alpha \cong 0{,}988\,\sigma u C\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81\text{b})$$

$$P_{x1} = 8\sigma a u^2 \cdot 0{,}1109 \sin^2\alpha\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82\text{b})$$

Il est à remarquer que la force portante est proportionnelle à $\sin\alpha$ et la résistance — à $\sin^2\alpha$; ces relations sont beaucoup plus simples que les relations générales (63, 64). Il faut ajouter que ce fait a lieu pour tous les profils symétriques par rapport à l'axe des x, même s'ils n'appartiennent pas au groupe de Joukowski. La marque caractéristique de la fonction de transformation correspondant à ces profils est: que tous ses coefficients sont réels.

2-o. Si le profil est asymétrique, les nombres F, H, L, N sont différents de zéro; pour les profils de Joukowski, leur signe concorde toujours avec celui de l'angle μ, ce qui est facile à prouver. Or, les deux profils de Joukowski, qui ne diffèrent que par le signe de cet angle, sont les images l'un de l'autre par rapport à l'axe des x; ces profils sont employés en pratique dans la position où leur concavité est tournée vers le bas, ce qui correspond aux valeurs positives de μ. Les nombres mentionnés F, H, L, N sont donc positifs; leurs valeurs numériques sont d'ailleurs petites en comparaison avec E et G. Quant à ces derniers nombres, ils sont aussi toujours positifs et ils influent sur la valeur de la force portante d'une manière prépondérante. Au contraire, les nombres K et M n'influent point du tout sur la force portante, et leur influence sur la valeur de la résistance est à peine sensible.

Choisissons, par exemple, le profil № 12 [3]), pour lequel $k = 0{,}1$; $\mu = 30^0$; nous trouverons:

$$E = 1{,}0066\,; \quad F = 0{,}000665\,; \quad G = 1{,}9366\,; \quad H = 0{,}06049\,;$$
$$K = 0{,}001166\,; \quad L = 0{,}0001139\,; \quad M = 2{,}7753\,; \quad N = 0{,}1530\,.$$

$$P_{y1} = 8\sigma a u^2 \left[(0{,}9129 \cdot 1{,}0066 + 0{,}0392 \cdot 1{,}9366] \sin\alpha - (0{,}0805 \cdot 0{,}000665 + \right.$$
$$\left. + 0{,}0110 \cdot 0{,}06049 + 0{,}5388 \cdot 0{,}0001139 + 0{,}0041 \cdot 0{,}1530) \sin^2\alpha\right] =$$
$$= 8\sigma a u^2 \left[(0{,}9189 + 0{,}0759) \sin\alpha - (0{,}00005 + 0{,}00067 + 0{,}00006 + 0{,}00063) \sin^2\alpha\right] =$$
$$= 8\sigma a u^2 (0{,}9948 \sin\alpha - 0{,}00141 \sin^2\alpha) \cong 8\sigma a u^2 \cdot 0{,}995 \sin\alpha \cong 0{,}995\,\sigma u C\,. \quad . \quad . \quad (83)$$

---

[1]) Witoszyński, La Mécanique des profils d'aviation, p. 64.

[2]) Ibidem, p. 67.

[3]) Ibidem, p. 65.

$$P_{x1} = 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}9129 \cdot 0{,}000665 + 0{,}0392 \cdot 0{,}06049)\sin\alpha + (0{,}0805 \cdot 1{,}0066 + 0{,}0110 \cdot 1{,}9366 +$$

$$+ 0{,}5388 \cdot 0{,}001166 + 0{,}0041 \cdot 2{,}7753)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}0006 + 0{,}0024)\sin\alpha + (0{,}0810 + 0{,}0213 + 0{,}0006 + 0{,}0114)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,(0{,}0030\sin\alpha + 0{,}1143\sin^2\alpha)\,. \quad \quad (84)$$

Considérons maintenant le profil № 19 [1]), pour lequel $k = 0{,}2$; $\mu = 30^0$; ce profil est plus épais que le précédent. Nous obtiendrons:

$$E = 1{,}0054\,; \quad F = 0{,}00105\,; \quad G = 1{,}8317\,; \quad H = 0{,}1203\,;$$

$$K = 0{,}00123\,; \quad L = 0{,}0002128\,; \quad M = 2{,}4873\,; \quad N = 0{,}3053\,.$$

$$P_{y1} = 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}9129 \cdot 1{,}0054 + 0{,}0392 \cdot 1{,}8317)\sin\alpha - (0{,}0805 \cdot 0{,}00105 + 0{,}0110 \cdot 0{,}1203 +$$

$$+ 0{,}5388 \cdot 0{,}0002128 + 0{,}0041 \cdot 0{,}3053)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}9178 + 0{,}0718)\sin\alpha - (0{,}00008 + 0{,}00132 + 0{,}00011 + 0{,}00125)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,(0{,}9896\sin\alpha - 0{,}00276\sin^2\alpha) \cong 8\,\sigma\,a\,u^2 \cdot 0{,}990\sin\alpha \cong 0{,}990\,\sigma\,u\,C\,. \quad (85)$$

$$P_{x1} = 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}9129 \cdot 0{,}00105 + 0{,}0392 \cdot 0{,}1203)\sin\alpha + (0{,}0805 \cdot 1{,}0054 + 0{,}0110 \cdot 1{,}8317 +$$

$$+ 0{,}5388 \cdot 0{,}00123 + 0{,}0041 \cdot 2{,}4873)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}00096 + 0{,}00472)\sin\alpha + (0{,}0809 + 0{,}0201 + 0{,}0007 + 0{,}0102)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,(0{,}00568\sin\alpha + 0{,}1119\sin^2\alpha)\,. \quad \quad (86)$$

Nous concluons que la force portante est presque constante pour les profils de Joukowski et ne dépend pas de leur épaisseur, ce qui assure, jusqu'à une certaine limite, une supériorité aux profils plus épais puisqu'ils sont plus courts. Cependant la résistance augmente légèrement avec l'épaisseur (il importe de souligner que le second terme entre les paranthèses est beaucoup plus grand que le premier, si l'on considère les valeurs usuelles de l'angle α variant entre 5^0 et 10^0).

Il est intéressant d'évaluer l'influence du coefficient de courbure μ sur les forces P_{y1} et P_{x1}. Dans ce but nous allons étudier encore deux profils fort courbés:

Le profil № 14 [2]): $k = 0{,}1$; $\mu = 50^0$.

$$E = 1{,}0068\,; \quad F = 0{,}001038\,; \quad G = 1{,}9635\,; \quad H = 0{,}09280\,;$$

$$K = 0{,}001209\,; \quad L = 0{,}0001775\,; \quad M = 2{,}8337\,; \quad N = 0{,}2392.$$

$$P_{y1} = 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}9129 \cdot 1{,}0068 + 0{,}0392 \cdot 1{,}9635)\sin\alpha - (0{,}0805 \cdot 0{,}001038 + 0{,}0110 \cdot 0{,}09280 +$$

$$+ 0{,}5388 \cdot 0{,}0001775 + 0{,}0041 \cdot 0{,}2392)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,[(0{,}9191 + 0{,}0770)\sin\alpha - (0{,}00008 + 0{,}00102 + 0{,}00010 + 0{,}00098)\sin^2\alpha] =$$

$$= 8\,\sigma\,a\,u^2\,(0{,}9961\sin\alpha - 0{,}00218\sin^2\alpha) \cong 8\,\sigma\,a\,u^2 \cdot 0{,}996\sin\alpha \cong 0{,}996\,\sigma\,u\,C\,. \quad (87)$$

---

[1]) Ibidem, p. 69.

[2]) Ibidem, p. 66.

$$P_{x1} = 8\sigma a u^2 [(0{,}9129 \cdot 0{,}001038 + 0{,}0392 \cdot 0{,}09280) \sin\alpha + (0{,}0805 \cdot 1{,}0068 + 0{,}0110 \cdot 1{,}9635 +$$
$$+ 0{,}5388 \cdot 0{,}001209 + 0{,}0041 \cdot 2{,}8337) \sin^2\alpha] =$$
$$= 8\sigma a u^2 [(0{,}0009 + 0{,}0036) \sin\alpha + (0{,}0810 + 0{,}0216 + 0{,}0007 + 0{,}0116) \sin^2\alpha] =$$
$$= 8\sigma a u^2 (0{,}0045 \sin\alpha + 0{,}1149 \sin^2\alpha) \quad \quad (88)$$

Le profil № 21 [1]): $k = 0{,}2$; $\mu = 50^0$.

$E = 1{,}0059$; $F = 0{,}001966$; $G = 1{,}8850$; $H = 0{,}18497$;

$K = 0{,}001053$; $L = 0{,}0003387$; $M = 2{,}6294$; $N = 0{,}4684$.

$$P_{y1} = 8\sigma a u^2 [(0{,}9129 \cdot 1{,}0059 + 0{,}0392 \cdot 1{,}8850) \sin\alpha - (0{,}0805 \cdot 0{,}001966 + 0{,}0110 \cdot 0{,}18497 +$$
$$+ 0{,}5388 \cdot 0.0003387 + 0{,}0041 \cdot 0{,}4684) \sin^2\alpha] =$$
$$= 8\sigma a u^2 [(0{,}9183 + 0{,}0739) \sin\alpha - (0{,}00016 + 0{,}00203 + 0{,}00018 + 0{,}00192) \sin^2\alpha] =$$
$$= 8\sigma a u^2 (0{,}9922 \sin\alpha - 0{,}00429 \sin^2\alpha) \cong 8\sigma a u^2 \cdot 0{,}992 \sin\alpha \cong 0{,}992\, \sigma u C \quad \quad (89)$$

$$P_{x1} = 8\sigma a u^2 [(0{,}9129 \cdot 0{,}001966 + 0{,}0392 \cdot 0{,}18497) \sin\alpha + (0{,}0805 \cdot 1{,}0059 + 0{,}0110 \cdot 1{,}8850 +$$
$$+ 0{,}5388 \cdot 0{,}001053 + 0{,}0041 \cdot 2{,}6294) \sin^2\alpha] =$$
$$= 8\sigma a u^2 [(0{,}0018 + 0{,}0072) \sin\alpha + (0{,}0810 + 0{,}0207 + 0{,}0006 + 0{,}0108) \sin^2\alpha] =$$
$$= 8\sigma a u^2 (0{,}0090 \sin\alpha + 0{,}1131 \sin^2\alpha) \quad \quad (90)$$

La force portante reste toujours presque constante. La résistance augmente sensiblement avec le coefficient de courbure et c'est le terme contenant $\sin\alpha$ qui commence à exercer une influence de plus en plus croissante. Or, on est forcé d'employer dans la pratique les profils très courbés qui permettent d'éviter le décollement double même pour les grands angles d'attaque. Leur résistance est grande, ce qui constitue un défaut des profils de Joukowski.

Nous ne nous occuperons pas de la recherche des profils plus avantageux que ceux de Joukowski. Il faudrait consacrer à ce problème un travail spécial. Nous observerons cependant qu'il nous parait peu probable qu'on réussisse à diminuer le second terme (renfermant $\sin^2\alpha$) dans la formule (64). C'est le terme renfermant $\sin\alpha$ qui pourrait être rendu plus petit en tant que les deux nombres F et H. Si l'on parvenait à annuler ce terme, on aurait probablement „le meilleur profil".

§ 7.

Nous passons maintenant aux recherches concernant une autre forme du potentiel complémentaire qui peut remplacer la fonction (27). L'étude de ce potentiel n'est pas poussée jusqu'à la fin, c'est-à-dire qu'elle n'est pas developpée jusqu'à obtenir les formules générales analogues à (63) et (64). Cette imperfection peut être justifiée par les difficultés analytiques qui ne sont pas encore surmontées entièrement; le nouveau potentiel est sans doute moins simple que le potentiel de quatre tourbillons. Néanmoins il peut présenter peut-être un intérêt scientifique à cause de sa généralité et de sa structure particulière qui peut le rendre utile aux problèmes de l'hydrodynamique appliquée.

---

[1]) Ibidem, p. 70.

On parvient à ce potentiel par le procédé suivant. Considérons encore une fois l'expression générale (37) qui représente le système des tourbillons satisfaisant aux conditions établies dans les §§ 1 et 2. Admettons que le symbole $\sum_\nu$ désigne une somme infinie et que les coefficients C_ν sont infiniment petits. Nous imaginons donc un ensemble infini des tourbillons d'intensité infiniment faible dont la distribution dans le plan peut être choisie d'une façon arbitraire. Il sera utile de placer les centres des tourbillons le long d'une ligne, en les distribuant d'une façon continue: la sommation des potentiels se réduira ainsi à une intégration.

Pour simplifier le calcul nous choisissons la partie négative de l'axe des X comme lieu des centres des tourbillons en question. Nous aurons donc:

$$R_\nu e^{i\Theta_\nu} = \xi, \quad \text{où} \quad -\infty < \xi < -a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

conformément à la fig. 4. Nous écrirons ensuite dC au lieu de C_ν; le quotient $\frac{dC}{d\xi}$ doit être une fonction de ξ que nous désignerons par $C'(\xi)$ et que nous choisirons convenablement. L'expression (37) prendra maintenant la forme suivante:

$$f_1(Z) = \int_{\xi=-a}^{-\infty} \left[\frac{C'(\xi)\, d\xi}{2\pi} i \lg \frac{Z-\xi}{a} - \frac{C'(\xi)\, d\xi}{2\pi} i \lg \frac{Z - \frac{a^2}{\xi}}{a} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

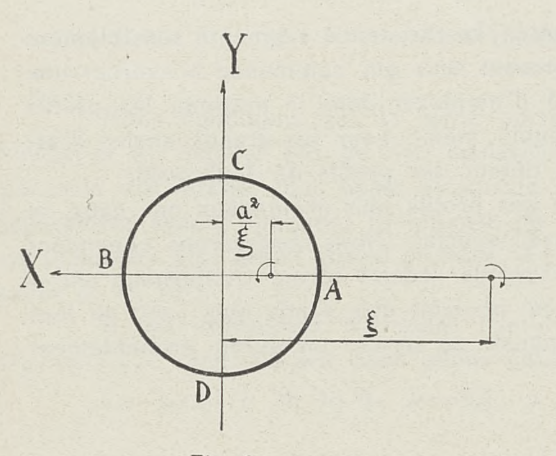


Fig. 4.

Il ne faut pas s'attendre à ce que les points de l'axe des X soient tous singuliers par rapport à la fonction $f_1(Z)$. Au contraire, cette fonction y sera en général finie ainsi que sa première dérivée, si l'on observe seulement la règle que $C'(-\infty)$ soit infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. Nous admettrons encore: $C'(-a) = 0$, ce qui semble être d'accord avec les propriétés physiques de la couche tourbillonnaire.

Essayons la forme suivante de $C'(\xi)$:

$$C'(\xi) = \frac{k(\xi + a)}{\xi^3}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

cette fonction est la plus simple qu'on puisse imaginer. Mais il faut stipuler d'avance que nous n'espérons pas trouver immédiatement un potentiel propre à nos buts par une hypothèse tellement arbitraire. Nous avons en vue seulement de chercher le type convenable du potentiel „circulaire" que l'on pourra modifier et généraliser.

En introduisant (93) dans (92), nous obtenons:

$$f_1(Z) = \int_{\xi=-a}^{-\infty} \left[\frac{k(\xi + a)\, d\xi}{2\pi\, \xi^3} i \lg \frac{Z-\xi}{a} - \frac{k(\xi + a)\, d\xi}{2\pi\, \xi^3} i \lg \frac{Z - \frac{a^2}{\xi}}{a} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Nous effectuons l'intégration:

$$f_1(Z) = \frac{ki}{2\pi} \cdot \left| -\frac{a+2\xi}{2\xi^2} \lg \frac{Z-\xi}{a} - \frac{a+2Z}{2Z^2} \lg \frac{\xi}{\xi - Z} + \frac{a}{2Z\xi} \right|_{\xi=-a}^{-\infty} -$$

$$-\frac{ki}{2\pi} \cdot \left| -\frac{a+2\xi}{2\xi^2} \lg \frac{Z\xi - a^2}{a\xi} - \frac{2aZ+Z^2}{2a^3} \lg \frac{Z\xi - a^2}{Z\xi} + \frac{a}{4\xi^2} + \frac{2a+Z}{2a\xi} \right|_{\xi=-a}^{-\infty} =$$

$$= \frac{ki}{2\pi} \left(-\frac{1}{2a} \lg \frac{Z+a}{a} - \frac{a+2Z}{2Z^2} \lg \frac{a+Z}{a} + \frac{1}{2Z} \right) -$$

$$-\frac{ki}{2\pi} \left(-\frac{1}{2a} \lg \frac{Z+a}{a} - \frac{2aZ+Z^2}{2a^3} \lg \frac{Z+a}{Z} - \frac{1}{4a} + \frac{2a+Z}{2a^2} \right),$$

d'où:

$$f_1(Z) = \frac{ki}{4\pi} \left(\frac{a^2 - Z^2}{a^2 Z} - \frac{a+2Z}{Z^2} \lg \frac{a+Z}{a} + \frac{2aZ+Z^2}{a^3} \lg \frac{a+Z}{Z} \right) . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

La vitesse complexe correspondante s'exprime par la formule suivante:

$$f_1'(Z) = -\frac{ki}{4\pi} \left[\frac{2a^2 + aZ + 2Z^2}{a^2 Z^2} - \frac{2(a+Z)}{Z^3} \lg \frac{a+Z}{a} - \frac{2(a+Z)}{a^3} \lg \frac{a+Z}{Z} \right] . \quad . \quad (95')$$

Le potentiel trouvé est une fonction multiforme un peu plus compliquée que celles dont il s'agissait jusqu'ici. Elle possède une infinité de déterminations différentes, et il est à remarquer que la même propriété se rapporte à la première dérivée (95') — contrairement aux (24) et (38'), où il n'y avait pas de logarithmes. Pour définir la vitesse d'une manière univoque, il faudra donc établir les déterminations convenables des logarithmes $\lg \frac{a+Z}{a}$ et $\lg \frac{a+Z}{Z}$. Or, le premier ne possède qu'un seul point critique ($Z = -a$); si Z varie d'une manière continue le long d'une courbe fermée renfermant le cercle primitif et revient à la valeur initiale, ce logarithme augmente d'une constante cyclique $2\pi i$ ou bien d'un multiple de cette constante, si le cercle est contourné plusieurs fois. Donc, pour que $\lg \frac{a+Z}{a}$ devienne déterminé dans le domaine à l'extérieur du cercle, il est nécessaire de fixer sa valeur à un point quelconque de ce domaine et de tracer une coupure indéfinie partant du point critique.

L'autre logarithme diffère totalement du premier: il possède deux points critiques ($Z = -a$ et $Z = 0$) dont les constantes cycliques sont égales et de signe contraire. En contournant le cercle, nous ne changeons pas la détermination de ce logarithme. Il suffira donc de fixer sa valeur à un point arbitraire du domaine à l'extérieur du cercle, tandis qu'une coupure est superflue.

Ces propriétés des deux logarithmes deviennent plus claires, si l'on passe aux coordonnées polaires, en substituant:

$$Z = r e^{i\vartheta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

et si l'on considère les décompositions:

$$\lg \frac{a+Z}{a} = \lg \left(1 + \frac{r}{a} e^{i\vartheta} \right) = \lg \left[\left(1 + \frac{r}{a} \cos\vartheta \right) + i \frac{r}{a} \sin\vartheta \right] =$$

$$= \lg \left| \sqrt{1 + \frac{2r}{a} \cos\vartheta + \frac{r^2}{a^2}} \right| + i \cdot \operatorname{Arctg} \frac{r \sin\vartheta}{a + r\cos\vartheta}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

$$\lg\frac{a+Z}{Z}=\lg\left(1+\frac{a}{r}e^{-i\vartheta}\right)=\lg\left[\left(1+\frac{a}{r}\cos\vartheta\right)-i\frac{a}{r}\sin\vartheta\right]=$$

$$=\lg\left|\sqrt{1+\frac{2a}{r}\cos\vartheta+\frac{a^2}{r^2}}\right|-i\cdot\mathrm{Arctg}\frac{a\sin\vartheta}{r+a\cos\vartheta}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97')$$

dans les deux formules, un multiple arbitraire de $2\pi i$ est sous-entendu; mais ce multiple varie dans (97), lorsque l'angle ϑ augmente de 2π en variant d'une manière continue, tandis qu'il n'arrive rien de pareil dans (97') — tout en supposant $r>a$.

Il s'agit maintenant de choisir les déterminations des deux logarithmes. Les motifs décisifs se rattachent aux conditions établies dans les §§ 1 et 2, qui ne serons remplies que par une combinaison particulière des déterminations. Considérons d'abord la condition III (page 42) qui exige que la vitesse à l'infini soit nulle. Or, dans la formule (95') le troisième terme entre les crochets suscite certains doutes à cet égard, puisqu'il contient le facteur $(a+Z)$ augmentant indéfiniment avec Z; l'autre facteur, exprimé par (97'), doit donc tendre vers zéro dans le même temps, quel que soit le chemin indéfini parcouru par Z. Admettons, par exemple, que Z reste réel et augmente le long de la partie positive de l'axe des X, à partir de $(+a)$; nous avons alors $\vartheta=0$, et le second terme de (97') est constamment nul ou égal à un multiple de (πi). C'est seulement le premier cas qui répond à notre condition. La détermination de la fonction $\lg\dfrac{a+Z}{Z}$ est donc fixée par la convention qu'elle soit réelle aux points de l'axe des X.

Quant à la détermination de $\lg\dfrac{a+Z}{a}$ elle doit être choisie de manière que la condition I (page 41) soit remplie, c. à. d. que la circonférence $|Z|=a$ soit une ligne du courant. Nous déduisont de (95') l'expression pour la vitesse complexe en coordonnées polaires :

$$v_\vartheta+iv_r=i\,e^{i\vartheta}f_1'\left(a\,e^{i\vartheta}\right)=\frac{k}{4\pi}\left[\frac{2}{r^2}e^{-i\vartheta}+\frac{1}{ar}-\frac{2}{a^2}e^{i\vartheta}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2a}{r^3}e^{-2i\vartheta}+\frac{2}{r^2}e^{-i\vartheta}\right)\lg\left(1+\frac{r}{a}e^{i\vartheta}\right)-\left(\frac{2r}{a^3}e^{2i\vartheta}+\frac{2}{a^2}e^{i\vartheta}\right)\lg\left(1+\frac{a}{r}e^{-i\vartheta}\right)\right] \quad .\ . \quad (98)$$

Nous y séparons encore la partie réelle et imaginaire à l'aide de (97, 97') et de décompositions connues:

$$\left.\begin{aligned} e^{i\vartheta}&=\cos\vartheta+i\sin\vartheta; & e^{2i\vartheta}&=\cos2\vartheta+i\sin2\vartheta;\\ e^{-i\vartheta}&=\cos\vartheta-i\sin\vartheta; & e^{-2i\vartheta}&=\cos2\vartheta-i\sin2\vartheta;\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

nous obtenons:

$$v_\vartheta=\frac{k}{4\pi}\left[\frac{2}{r^2}\cos\vartheta+\frac{1}{ar}+\frac{2}{a^2}\cos\vartheta-\left(\frac{2a}{r^3}\cos2\vartheta+\frac{2}{r^2}\cos\vartheta\right)\lg\left|\sqrt{1+\frac{2r}{a}\cos\vartheta+\frac{r^2}{a^2}}\right|-\right.$$

$$-\left(\frac{2a}{r^3}\sin2\vartheta+\frac{2}{r^2}\sin\vartheta\right)\cdot\mathrm{Arctg}\frac{r\sin\vartheta}{a+r\cos\vartheta}-\left(\frac{2r}{a^3}\cos2\vartheta+\frac{2}{a^2}\cos\vartheta\right)\lg\left|\sqrt{1+\frac{2a}{r}\cos\vartheta+\frac{a^2}{r^2}}\right|-$$

$$\left.-\left(\frac{2r}{a^3}\sin2\vartheta+\frac{2}{a^2}\sin\vartheta\right)\cdot\mathrm{Arctg}\frac{a\sin\vartheta}{r+a\cos\vartheta}\right]; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

$$v_r = \frac{k}{4\pi}\left[-\frac{2}{r^2}\sin\vartheta + \frac{2}{a^2}\sin\vartheta + \left(\frac{2a}{r^3}\sin 2\vartheta + \frac{2}{r^2}\sin\vartheta\right)\lg\left|\sqrt{1+\frac{2r}{a}\cos\vartheta + \frac{r^2}{a^2}}\right| - \right.$$

$$-\left(\frac{2a}{r^3}\cos 2\vartheta + \frac{2}{r^2}\cos\vartheta\right)\operatorname{Arctg}\frac{r\sin\vartheta}{a+r\cos\vartheta} - \left(\frac{2r}{a^3}\sin 2\vartheta + \frac{2}{a^2}\sin\vartheta\right)\lg\left|\sqrt{1+\frac{2a}{r}\cos\vartheta+\frac{a^2}{r^2}}\right| +$$

$$\left. + \left(\frac{2r}{a^3}\cos 2\vartheta + \frac{2}{a^2}\cos\vartheta\right)\operatorname{Arctg}\frac{a\sin\vartheta}{r+a\cos\vartheta}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (101)$$

La dernière expression doit s'annuler sur la circonférence $r=a$; cela a lieu en effet, si les deux Arctg sont égaux pour les valeurs égales de ϑ. Il en résulte que $\lg\frac{a+Z}{a}$ doit être réel sur la partie positive de l'axe des X de même que $\lg\frac{a+Z}{Z}$, ce qui suffit pour fixer la détermination. En ce qui concerne la coupure, il n'est pas nécessaire de la définir exactement; nous nous bornons à remarquer qu'elle commence au point $Z=-a$ et s'étend vers l'infini dans le voisinage de la partie *négative* de l'axe des X. On peut se figurer que le fluide se transfuse le long de cette coupure dans un autre plan de Riemann, où le mouvement change de propriétés; il est clair que la forme de la coupure n'a aucune influence sur la répartition des vitesses le long de la circonférence.

Cette répartition sera représentée par la formule (100) qui prend (pour $r=a$) la forme suivante :

$$V_c = \left|v_\vartheta\right|_{r=a} = \frac{k}{4\pi a^2}\left[1+4\cos\vartheta - 4(\cos 2\vartheta+\cos\vartheta)\cdot\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right) - 2\vartheta(\sin 2\vartheta + \sin\vartheta)\right]. \quad (102)$$

En particulier, la vitesse au point A (fig. 4) serait égale à $\left(-\frac{3k}{4\pi a^2}\right)$, ce qui ne doit pas différer de $(2u\sin\alpha)$, si nous voulons satisfaire à la condition II (page 42). Nous aurons donc $k=-\frac{8}{3}\pi a^2 u\sin\alpha$, d'où:

$$\frac{V_c}{2u\sin\alpha} = \frac{1}{3}\left[4(\cos 2\vartheta+\cos\vartheta)\cdot\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right) + 2\vartheta(\sin 2\vartheta+\sin\vartheta) - 1 - 4\cos\vartheta\right]. \quad (103)$$

Cette expression est positive sur toute la circonférence — pour les valeurs de ϑ comprises entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$; par exemple :

Point	ϑ	$\frac{V_c}{2u\sin\alpha}$
A	$-\pi$	1,000
C	$-\frac{\pi}{2}$	0,252
B	0	0,182
D	$+\frac{\pi}{2}$	0,252
A	$+\pi$	1,000

Le fluide s'écoule donc autour du cercle dans le même sens que dans tous les cas précédents. Mais la répartition des vitesses diffère beaucoup de celle exprimée par la formule (29)

(pour $\vartheta = 0$ nous avons 0,182 au lieu de 0,500!). Quant à la condition IV (page 43), elle est accomplie, car la formule (95′) peut être écrite de la manière suivante:

$$f_1'(Z) = -\frac{ki}{4\pi}\left[\frac{2}{a^2}+\frac{1}{aZ}+\frac{2}{Z^2}-\frac{2(a+Z)}{Z^3}\lg\frac{a+Z}{a}-2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{Z}{a^3}\right)\left(\frac{a}{Z}-\frac{a^2}{2Z^2}+\frac{a^3}{3Z^3}-\cdots\cdots\right)\right]=$$

$$=\frac{ki}{4\pi}\left[\frac{2(a+Z)}{Z^3}\lg\frac{a+Z}{a}-\frac{7}{3Z^2}+\frac{a}{6Z^3}-\frac{a^2}{10Z^4}+\frac{a^3}{15Z^5}-\cdots\cdots\right] \quad . \; . \; . \; . \; (104)$$

le développement étant convergent pour $|Z|>a$. On prouve aisément que le premier terme diminue plus rapidement que $\frac{1}{Z}$, lorsque Z augmente indéfiniment; les termes suivants sont infiniment petits d'ordres supérieurs.

Le potentiel (95) satisfait ainsi à toutes les conditions posées. Mais, comme la répartition des vitesses le long de la circonférence n'est pas juste, ce serait une peine perdue de calculer les intégrales P_{Y1} et P_{X1}. Nous pouvons seulement essayer de généraliser notre potentiel, sans détruire ses propriétés avantageuses, de telle façon que la répartition des vitesses devienne plus semblable à (29) ou (54).

§ 8.

Nous pouvons écrire le potentiel (95) et la vitesse complexe correspondante (95′) sous la forme suivante:

$$f_1(Z)=\frac{ki}{2\pi a}\left[\frac{a}{2Z}-\frac{Z}{2a}-\left(\frac{a^2}{2Z^2}+\frac{a}{Z}\right)\cdot\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right)+\left(\frac{Z^2}{2a^2}+\frac{Z}{a}\right)\cdot\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right] \quad . \; (105)$$

$$f_1'(Z)=\frac{ki}{2\pi aZ}\left[-\frac{a}{Z}-\frac{1}{2}-\frac{Z}{a}+\frac{a}{Z}\left(1+\frac{a}{Z}\right)\cdot\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right)+\frac{Z}{a}\left(1+\frac{Z}{a}\right)\cdot\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right] \quad . \; (105')$$

Il est facile de remarquer que ces formules ne représentent que les cas particuliers des formules plus générales:

$$f_1(Z)=Ai\left[g\left(\frac{a}{Z}\right)-g\left(\frac{Z}{a}\right)-h\left(\frac{a}{Z}\right)\cdot\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right)+h\left(\frac{Z}{a}\right)\cdot\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right], \quad . \; . \; (106)$$

$$f_1'(Z)=\frac{Ai}{Z}\left[-\frac{a}{Z}g'\left(\frac{a}{Z}\right)-\frac{Z}{a}g'\left(\frac{Z}{a}\right)-\frac{Z}{a+Z}h\left(\frac{a}{Z}\right)-\frac{a}{a+Z}h\left(\frac{Z}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{Z}h'\left(\frac{a}{Z}\right)\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right)+\frac{Z}{a}h'\left(\frac{Z}{a}\right)\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right], \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (106')$$

où les symboles g et h désignent des *fonctions rationnelles entières aux coefficients réels.* Nous affirmons que le potentiel (106) est toujours circulaire; de plus, la fonction h étant choisie arbitrairement, on peut toujours trouver une fonction g telle que la vitesse (106′) diminue plus rapidement que $\frac{1}{Z}$ quand Z augmente indéfiniment.

Pour démontrer la première partie de notre proposition, il suffit de prouver que l'égalité (18) est satisfaite. Or, nous trouvons:

$$\left|v_\vartheta + i v_r\right|_{Z=ae^{i\vartheta}} = i e^{i\vartheta} f_1'\left(a e^{i\vartheta}\right) = -\frac{A}{a}\left[-e^{-i\vartheta}\cdot g'\left(e^{-i\vartheta}\right) - e^{i\vartheta}\cdot g'\left(e^{i\vartheta}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{i\vartheta}}{1+e^{i\vartheta}}\cdot h\left(e^{-i\vartheta}\right) - \frac{1}{1+e^{i\vartheta}}\cdot h\left(e^{i\vartheta}\right) + e^{-i\vartheta}\cdot \lg\left(1+e^{i\vartheta}\right)\cdot h'\left(e^{-i\vartheta}\right) + e^{i\vartheta}\cdot \lg\left(1+e^{-i\vartheta}\right)\cdot h'\left(e^{i\vartheta}\right)\right] =$$

$$= \frac{A}{a}\left[(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)\cdot g'\left(e^{-i\vartheta}\right) + (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\, g'\left(e^{i\vartheta}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot h\left(e^{-i\vartheta}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - i\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot h\left(e^{i\vartheta}\right) - (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)\cdot\left(\lg 2\cos\frac{\vartheta}{2} + i\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot h'\left(e^{-i\vartheta}\right) -$$

$$\left. - (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\cdot\left(\lg 2\cos\frac{\vartheta}{2} - i\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot h'\left(e^{i\vartheta}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (107)$$

Cette expression est réelle, car nous avons trois paires de quantités complexes conjuguées; donc $v_r = 0$ sur toute la circonférence.

La seconde partie de la proposition peut être démontrée de la manière suivante. Les fonctions g et h sont les polynomes entiers de la forme:

$$h(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \cdots\cdots + A_m u^m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (108)$$

$$g(u) = B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + \cdots\cdots + B_n u^n \text{ [1]}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (109)$$

et leurs dérivées correspondantes:

$$h'(u) = A_1 + 2A_2 u + 3A_3 u^2 + \cdots\cdots + m A_m u^{m-1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (110)$$

$$g'(u) = B_1 + 2B_2 u + 3B_3 u^2 + \cdots\cdots + n B_n u^{n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

Pour les grandes valeurs de Z la formule (106′) peut être écrite comme suit:

$$f_1'(Z) = \frac{Ai}{Z}\left[-\frac{a}{Z}\, g'\left(\frac{a}{Z}\right) - \frac{Z}{a}\, g'\left(\frac{Z}{a}\right) - \left(1 - \frac{a}{Z} + \frac{a^2}{Z^2} - \frac{a^3}{Z^3} + \cdots\cdots\right)\cdot h\left(\frac{a}{Z}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{a}{Z} - \frac{a^2}{Z^2} + \frac{a^3}{Z^3} - \cdots\cdots\right)\cdot h\left(\frac{Z}{a}\right) + \frac{\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right)}{\left(\frac{Z}{a}\right)}\cdot h'\left(\frac{a}{Z}\right) + \frac{\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)}{\left(\frac{a}{Z}\right)}\cdot h'\left(\frac{Z}{a}\right)\right] \quad . \quad (112)$$

---

[1]) La constante B_0 peut être négligée, puisqu'elle disparait en tout cas dans (106).

Cette expression doit diminuer plus rapidement que $\frac{1}{Z}$. Cela exige que la partie entière (par rapport à Z) de l'expression qui se trouve entre les crochets soit identiquement nulle. Nous pouvons négliger le premier terme ainsi que le cinquième parce qu'ils ne possèdent pas de partie entière. Nous introduisons dans les autres termes les expressions (108 ∸ 111) et développons en même temps $\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)$ en série; nous trouverons l'égalité:

$$-\left[B_1\frac{Z}{a}+2B_2\frac{Z^2}{a^2}+3B_3\frac{Z^3}{a^3}+4B_4\frac{Z^4}{a^4}+\cdots\cdots+nB_n\frac{Z^n}{a^n}\right]-$$
$$-A_0-\left[(-A_1+A_2-A_3+\cdots\cdots\pm A_m)+(-A_2+A_3-A_4+\cdots\cdots\mp A_m)\frac{Z}{a}+\right.$$
$$+(-A_3+A_4-A_5+\cdots\cdots\pm A_m)\frac{Z^2}{a^2}+(-A_4+A_5-A_6+\cdots\cdots\mp A_m)\frac{Z^3}{a^3}+\cdots\cdots+$$
$$\left.+(-A_{m-1}+A_m)\frac{Z^{m-2}}{a^{m-2}}-A_m\frac{Z^{m-1}}{a^{m-1}}\right]+\left[(A_1-A_2+A_3-\cdots\cdots\mp A_m)+\right.$$
$$+\left(\frac{2}{1}A_2-\frac{3}{2}A_3+\frac{4}{3}A_4-\cdots\cdots\pm\frac{m}{m-1}A_m\right)\frac{Z}{a}+\left(\frac{3}{1}A_3-\frac{4}{2}A_4+\frac{5}{3}A_5-\cdots\cdots\mp\frac{m}{m-2}A_m\right)\frac{Z^2}{a^2}+$$
$$+\left(\frac{4}{1}A_4-\frac{5}{2}A_5+\frac{6}{3}A_6-\cdots\cdots\pm\frac{m}{m-3}A_m\right)\frac{Z^3}{a^3}-$$
$$\left.-\cdots\cdots+\left(\frac{m-1}{1}A_{m-1}-\frac{m}{2}A_m\right)\frac{Z^{m-2}}{a^{m-2}}+\frac{m}{1}A_m\frac{Z^{m-1}}{a^{m-1}}\right]=0\,; \quad \text{. . . . (113)}$$

En identifiant les coefficients des puissances consécutives de $\frac{Z}{a}$ à zéro, nous obtenons la série des égalités:

$$\left.\begin{aligned}
&A_0=0\,;\\
&B_1=\left(\frac{2}{1}-1\right)A_2-\left(\frac{3}{2}-1\right)A_3+\left(\frac{4}{3}-1\right)A_4-\cdots\cdots\pm\left(\frac{m}{m-1}-1\right)A_m,\\
&2B_2=\left(\frac{3}{1}-1\right)A_3-\left(\frac{4}{2}-1\right)A_4+\left(\frac{5}{3}-1\right)A_5-\cdots\cdots\mp\left(\frac{m}{m-2}-1\right)A_m,\\
&3B_3=\left(\frac{4}{1}-1\right)A_4-\left(\frac{5}{2}-1\right)A_5+\left(\frac{6}{3}-1\right)A_6-\cdots\cdots\pm\left(\frac{m}{m-3}-1\right)A_m,\\
&-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\\
&-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\\
&(n-1)B_{n-1}=\left(\frac{m-1}{1}-1\right)A_{m-1}-\left(\frac{m}{2}-1\right)A_m,\\
&nB_n=\left(\frac{m}{1}-1\right)A_m\,;
\end{aligned}\right\}\quad \text{. . (114)}$$

d'où:

$$\left.\begin{aligned}
&n = m - 1\,,\\
&A_0 = 0\,,\\
&B_1 = A_2 - \frac{A_3}{2} + \frac{A_4}{3} - \frac{A_5}{4} + \cdots\cdots \pm \frac{A_m}{m-1}\,,\\
&B_2 = A_3 - \frac{A_4}{2} + \frac{A_5}{3} - \frac{A_6}{4} + \cdots\cdots \mp \frac{A_m}{m-2}\,,\\
&B_3 = A_4 - \frac{A_5}{2} + \frac{A_6}{3} - \frac{A_7}{4} + \cdots\cdots \pm \frac{A_m}{m-3}\,,\\
&- - - - - - - - -\\
&- - - - - - - - -\\
&B_{m-2} = A_{m-1} - \frac{A_m}{2}\,,\\
&B_{m-1} = A_m\,.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

Les formules (115) expriment, de manière univoque, les coefficients B par les coefficients A, ce qui démontre la seconde partie de notre proposition. Il n'y a qu'une restriction, à savoir $A_0 = 0$; c'était à prévoir, car ce coefficient se trouve dans deux termes du potentiel (106):

$$-A_0 \lg \frac{a+Z}{a} + A_0 \lg \frac{a+Z}{Z} = -A_0 \lg \frac{Z}{a}\,;$$

ils se réduisent ensemble à un tourbillon unique qui donne une énergie cinétique infiniment grande. Nous allons omettre toujours cette constante dans l'expression (108).

Il est nécessaire encore de réfléchir sur la forme du polynome $h(u)$. Or, la formule (106') montre que la vitesse deviendrait infinie au point A de la fig. 4 ($Z = -a$), si nous avions $h'(-1) \neq 0$. Nous devons admettre donc:

$$h'(-1) = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

Nous pouvons poser encore:

$$A_1 = 1\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

sans détruire la généralité des formules. En tenant compte de (116) et (117), nous écrirons:

$$h'(u) = (1+u)\,(1+\lambda u)\,(1+\mu u)\,(1+\nu u) \ldots\ldots (1+\tau u)\,, \quad \ldots\ldots \quad (118)$$

où les paramètres $\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots \tau$ peuvent avoir les valeurs arbitraires réelles; les paires des valeurs complexes conjuguées sont aussi admissibles.

Le potentiel (95), que nous avons trouvé dans le § précédent, correspondait à une forme particulière de $h'(u)$, à savoir:

$$h'(u) = 1 + u\,;$$

ce potentiel était donc *le plus simple possible* du type (106), correspondant au cas:

$$\lambda = \mu = \nu = \cdots\cdots = \tau = 0\,.$$

Il convient maintenant d'admettre:

$$h'(u) = (1+u)(1+\lambda u)\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

nous disposerons ainsi du paramètre arbitraire λ, ce qui nous permettra de changer la répartition des vitesses et de la rendre aussi conforme à (29) ou (54) que possible.

En raison de (119), nous trouvons successivement:

$$h'(u) = 1 + (1+\lambda)\,u + \lambda u^2\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

$$h(u) = u + \frac{1+\lambda}{2}\,u^2 + \frac{\lambda}{3}\,u^3\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

ensuite, en vertu de (108):

$$A_1 = 1\,; \quad A_2 = \frac{1+\lambda}{2}\,; \quad A_3 = \frac{\lambda}{3}\,;$$

les formules (115) donnent maintenant:

$$B_1 = \frac{2\lambda+3}{6}\,; \quad B_2 = \frac{\lambda}{3}\,;$$

d'où, selon (109):

$$g(u) = \frac{2\lambda+3}{6}\,u + \frac{\lambda}{3}\,u^2\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

$$g'(u) = \frac{2\lambda+3}{6} + \frac{2\lambda}{3}\,u\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (123)$$

En substituant les expressions (120 ÷ 123) dans les formules (106, 106'), nous trouvons la nouvelle forme du potentiel complémentaire et de la vitesse correspondante:

$$f_1(Z) = Ai\left[\left(\frac{\lambda}{3}\,\frac{a^2}{Z^2} + \frac{2\lambda+3}{6}\cdot\frac{a}{Z} - \frac{2\lambda+3}{6}\cdot\frac{Z}{a} - \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{Z^2}{a^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{a}{Z} + \frac{1+\lambda}{2}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^3}{Z^3}\right)\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right) + \left(\frac{Z}{a} + \frac{1+\lambda}{2}\cdot\frac{Z^2}{a^2} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{Z^3}{a^3}\right)\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right]; \quad (124)$$

$$f_1'(Z) = \frac{Ai}{Z}\left[-\left(\lambda\,\frac{a^2}{Z^2} + \frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{a}{Z} + \frac{3-\lambda}{6} + \frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{Z}{a} + \lambda\,\frac{Z^2}{a^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a}{Z} + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \lambda\,\frac{a^3}{Z^3}\right)\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right) + \left(\frac{Z}{a} + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\frac{Z^2}{a^2} + \lambda\,\frac{Z^3}{a^3}\right)\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right]. \quad (124')$$

Les potentiels (95) et (105) ne présentent qu'un cas spécial de (124), pour lequel $\lambda = 0$.

Nous allons étudier maitenant la répartition des vitesses sur la circonférence qui correspond au potentiel trouvé. La formule générale (107) nous donne cette répartition, si on y introduit les expressions (120, 121, 123). Nous obtenons:

$$V_c = \left|v_\vartheta\right|_{Z=ae^{i\vartheta}} = \frac{A}{a}\left[\left(\frac{3-\lambda}{6} + \frac{\lambda+2}{1}\cdot\cos\vartheta + 2\lambda\cos 2\vartheta\right) - \vartheta\left(\sin\vartheta + \frac{1+\lambda}{1}\sin 2\vartheta + \lambda\sin 3\vartheta\right) - \right.$$
$$\left. - 2\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot\left(\cos\vartheta + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\cos 2\vartheta + \lambda\cos 3\vartheta\right)\right]. \quad \ldots\ldots \quad (125)$$

En particulier, la vitesse au point A $(\vartheta = \pm \pi)$ sera :

$$\left|V_c\right|_{Z=-a} = \frac{A}{a}\left\{\frac{5\lambda - 9}{6} - 0 - 2 \lim_{\vartheta \to \pi}\left[\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot\left(\cos\vartheta + \frac{1+\lambda}{1}\cos 2\vartheta + \lambda\cos 3\vartheta\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{A(5\lambda - 9)}{6a}\,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (126)$$

le même résultat peut être obtenu directement de (124′):

$$f_1'(-a) = \frac{Ai(5\lambda - 9)}{6a}\,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (127)$$

Cette valeur doit satisfaire à la formule (19), donc:

$$A = \frac{12\,au\sin\alpha}{5\lambda - 9}\,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (128)$$

En tenant compte de (128), nous écrirons les formules (124, 124′, 125) sous la forme définitive :

$$f_1(Z) = \frac{12\,aui\sin\alpha}{5\lambda - 9}\left[\left(\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \frac{2\lambda+3}{6}\cdot\frac{a}{Z} - \frac{2\lambda+3}{6}\cdot\frac{Z}{a} - \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{Z^2}{a^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{a}{Z} + \frac{1+\lambda}{2}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^3}{Z^3}\right)\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right) + \left(\frac{Z}{a} + \frac{1+\lambda}{2}\cdot\frac{Z^2}{a^2} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{Z^3}{a^3}\right)\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right]; \quad . \quad (129)$$

$$f_1'(Z) = \frac{12\,aui\sin\alpha}{(5\lambda - 9)Z}\left[-\left(\lambda\frac{a^2}{Z^2} + \frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{a}{Z} + \frac{3-\lambda}{6} + \frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{Z}{a} + \lambda\frac{Z^2}{a^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a}{Z} + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \lambda\frac{a^3}{Z^3}\right)\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right) + \left(\frac{Z}{a} + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\frac{Z^2}{a^2} + \lambda\frac{Z^3}{a^3}\right)\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right]; \quad (129')$$

$$V_c = \frac{12u\sin\alpha}{5\lambda - 9}\left[\left(\frac{3-\lambda}{6} + \frac{\lambda+2}{1}\cdot\cos\vartheta + 2\lambda\cos 2\vartheta\right) - \vartheta\left(\sin\vartheta + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\sin 2\vartheta + \lambda\sin 3\vartheta\right) - \right.$$

$$\left. - 2\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot\left(\cos\vartheta + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\cos 2\vartheta + \lambda\cos 3\vartheta\right)\right]. \quad \ldots \ldots \quad (130)$$

La dernière formule peut être écrite encore sous la forme abrégée :

$$\frac{V_c}{2u\sin\alpha} = \frac{M - N\lambda}{9 - 5\lambda}\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (130')$$

où on a posé :

$$M = -(3 + 12\cos\vartheta) + 6\vartheta(\sin\vartheta + \sin 2\vartheta) + 12\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot(\cos\vartheta + \cos 2\vartheta)\,;$$

$$N = (12\cos 2\vartheta + 6\cos\vartheta - 1) - 6\vartheta(\sin 2\vartheta + \sin 3\vartheta) - 12\lg\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot(\cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta)\,.$$

Nous donnons ci-dessous le tableau des valeurs numériques se rapportant à la formule (130′) pour plusieurs valeurs du paramètre λ. Ce tableau est analogue à celui de la page 44 et 52.

ϑ^0	M	N	$\frac{V_c}{2u \sin\alpha}$ pour les valeurs suivantes de λ:								
			0	1,0	1,1	1,15	1,2	1,25	1,34	1,5	1,8
—180	9,0000	5,0000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
—170	6,7666	3,0992	0,752	0,834	0,959	0,985	1,016	1,052	1,136	1,411	∞
—160	5,4342	2,1948	0,604	0,810	0,863	0,895	0,933	0,978	1,083	1,428	∞
—150	4,5352	1,6505	0,504	0,721	0,777	0,811	0,852	0,899	1,010	1,373	∞
—140	3,8780	1,3004	0,431	0,644	0,699	0,733	0,773	0,819	0,928	1,285	∞
—130	3,3823	1,0573	0,376	0,581	0,634	0,667	0,705	0,749	0,854	1,198	∞
—120	3,0000	0,8825	0,333	0,529	0,580	0,611	0,647	0,690	0,790	1,117	∞
—110	2,6985	0,7555	0,300	0,461	0,534	0,563	0,597	0,638	0,733	1,043	∞
—100	2,4409	0,6571	0,271	0,446	0,491	0,519	0,551	0,589	0,678	0,970	∞
— 90	2,2656	0,5840	0,252	0,420	0,464	0,490	0,522	0,558	0,645	0,926	∞
— 80	2,0879	0,5187	0,232	0,392	0,434	0,459	0,489	0,523	0,606	0,873	∞
— 70	1,9840	0,4819	0,220	0,376	0,415	0,440	0,469	0,502	0,582	0,841	∞
— 60	1,8825	0,4461	0,209	0,359	0,398	0.421	0,449	0,482	0,559	0,809	∞
— 50	1,8027	0,4191	0,200	0,346	0,377	0,406	0,433	0,465	0,540	0,783	∞
— 40	1,7407	0,3990	0,193	0,335	0,372	0,394	0,421	0,452	0,524	0,761	∞
— 30	1,6938	0,3830	0,188	0,328	0,364	0,386	0,411	0,442	0,513	0,746	∞
— 20	1,6595	0,3736	0,184	0,321	0,357	0,378	0,404	0,434	0,504	0,733	∞
— 10	1,6410	0,3676	0,182	0,318	0,353	0,375	0,400	0,430	0,499	0,726	∞
0	1,6368	0,3632	0,182	0,318	0,354	0,378	0,400	0,430	0,500	0,728	∞
10	1,6410	0,3676	0,182	0,318	0,353	0,375	0,400	0,430	0,499	0,726	∞
20	1,6595	0,3736	0,184	0,321	0,357	0,378	0,404	0,434	0,504	0,733	∞
30	1,6938	0,3830	0,188	0,328	0,364	0,386	0,411	0,442	0,513	0,746	∞
40	1,7407	0,3990	0,193	0,335	0,372	0,394	0,421	0,452	0,524	0,761	∞
50	1,8027	0,4191	0,200	0,346	0,377	0,406	0,433	0,465	0,540	0,783	∞
60	1,8825	0,4461	0,209	0,359	0,398	0,421	0,449	0,482	0,559	0,809	∞
70	1,9840	0,4819	0,220	0,376	0,415	0,440	0,469	0,502	0,582	0,841	∞
80	2,0879	0,5187	0,232	0,392	0,434	0,459	0,489	0,523	0,606	0,873	∞
90	2,2656	0,5840	0,252	0,420	0,464	0,490	0,522	0,558	0,645	0,926	∞
100	2,4409	0,6571	0,271	0,446	0,491	0,519	0,551	0,589	0,678	0,970	∞
110	2,6985	0,7555	0,300	0,461	0,534	0,563	0,597	0,638	0,733	1,043	∞
120	3,0000	0,8825	0,333	0,529	0,580	0,611	0,647	0,690	0,790	1,117	∞
130	3,3823	1,0573	0,376	0,581	0,634	0,667	0,705	0,749	0,854	1,198	∞
140	3,8780	1,3004	0,431	0,644	0,699	0,733	0,773	0,819	0,928	1,285	∞
150	4,5352	1,6505	0,504	0,721	0,777	0,811	0,852	0,899	1,010	1,373	∞
160	5,4342	2,1948	0,604	0,810	0,863	0,895	0,933	0,978	1,083	1,428	∞
170	6,7666	3,0992	0,752	0,834	0,959	0,985	1,016	1,052	1,136	1,411	∞
180	9,0000	5,0000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Le diagramme de la fig. 5 montre la répartition des vitesses sur la circonférence pour les valeurs choisies de λ. Nous y trouvons aussi les courbes correspondant aux potentiels que nous avons étudié auparavant: J désigne la répartition uniforme des vitesses selon Joukowski, W — la répartition d'après la formule (29), 4-t — d'après la formule (54) dérivant du potentiel de quatre tourbillons. On remarque la grande concordance des courbes 4-t et W. Quant aux courbes λ, elles présentent beaucoup d'arbitraire; toutefois, pour les valeurs de λ comprises entre

1,1 et 1,4 ces courbes se rapprochent assez bien des deux courbes précédentes. Certes, la coïncidence n'est pas extraordinaire; mais il faut se rendre compte que nous n'avons introduit *qu'un seul* paramètre λ, tandis que le potentiel de quatre tourbillons en possédait plusieurs. Nous voyons que notre nouveau potentiel présente des qualités avantageuses pour notre but, et nous pouvons les améliorer encore, en introduisant un facteur additionnel $(1+\mu)$ dans le développement de $h'(u)$.

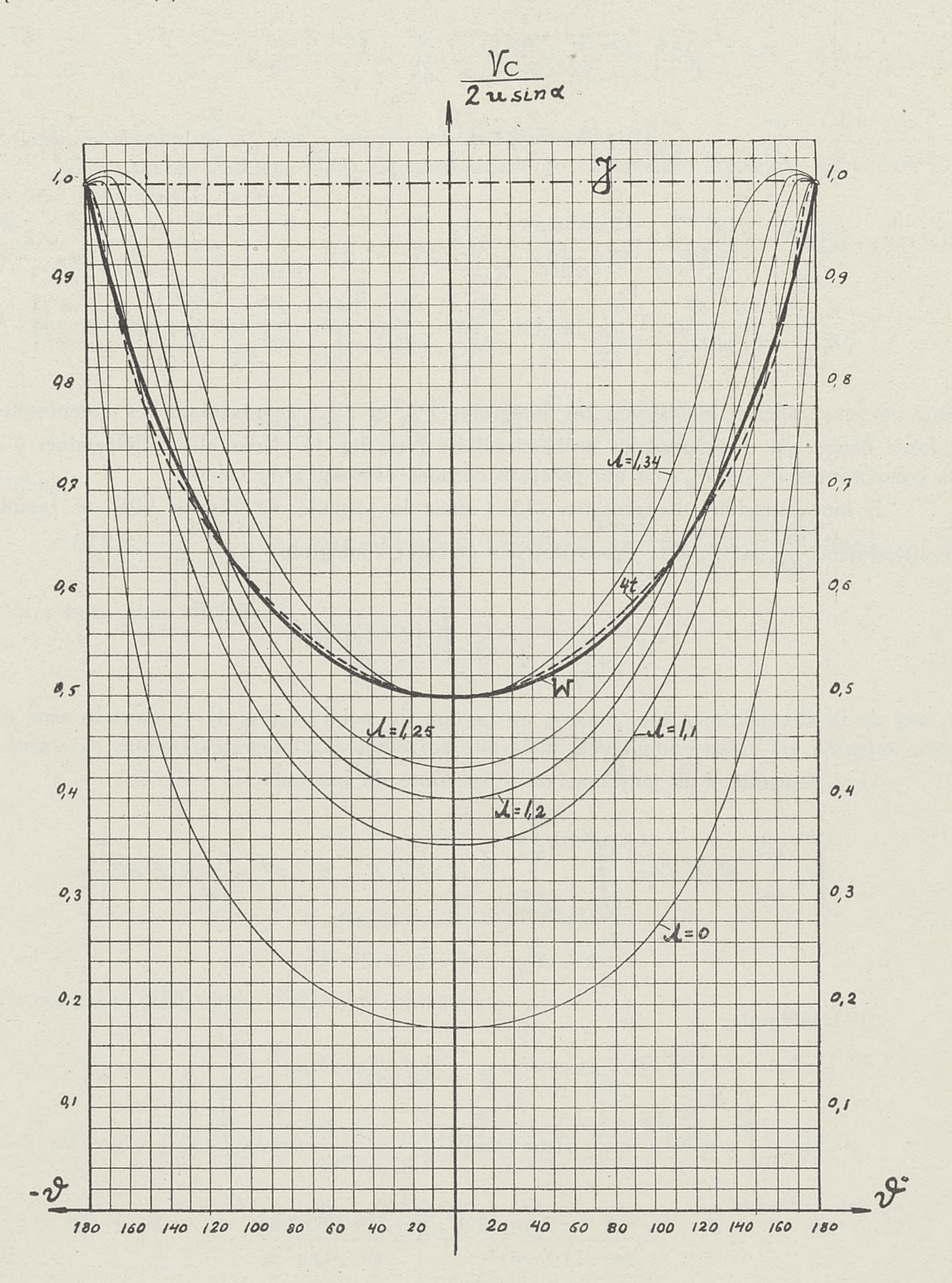


Fig. 5.

§ 9.

Introduisons dans les formules (21) et (21′) les expressions (11, 11′) du potentiel uniforme ainsi que les expressions (129, 129′) du nouveau potentiel complémentaire; nous obtiendrons le potentiel et la vitesse complexe du mouvement résultant:

$$f(Z) = -u\left(e^{i\alpha} Z + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z}\right) + \frac{12\,aui \sin\alpha}{5\lambda - 9}\left[\left(\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \frac{2\lambda+3}{6}\cdot\frac{a}{Z} - \frac{2\lambda+3}{6}\cdot\frac{Z}{a} - \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{Z^2}{a^2}\right) -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{a}{Z} + \frac{1+\lambda}{2}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^3}{Z^3}\right)\cdot \lg\left(1+\frac{Z}{a}\right) + \left(\frac{Z}{a} + \frac{1+\lambda}{2}\cdot\frac{Z^2}{a^2} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{Z^3}{a^3}\right)\cdot \lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right]. \quad (131)$$

$$f'(Z) = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) + \frac{12\,aui \sin\alpha}{(5\lambda-9)\,Z}\left[-\left(\lambda\frac{a^2}{Z^2} + \frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{a}{Z} + \frac{3-\lambda}{6} + \frac{2+\lambda}{2}\cdot\frac{Z}{a} + \lambda\frac{Z^2}{a^2}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{a}{Z} + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\frac{a^2}{Z^2} + \lambda\frac{a^3}{Z^3}\right)\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right) + \left(\frac{Z}{a} + \frac{1+\lambda}{1}\cdot\frac{Z^2}{a^2} + \lambda\frac{Z^3}{a^3}\right)\lg\left(1+\frac{a}{Z}\right)\right]. \quad (131')$$

Nous pouvons calculer maintenant les intégrales P_{Y1} et P_{X1}, représentant les composantes de la force fictive qui correspond au profil circulaire (voir fig. 1). Nous allons déterminer d'abord les composantes P_Y et P_X, ce qui présente certains avantages du calcul.

Il faut introduire l'expression (131′) dans la formule de Blasius (9), en remplaçant simultanément $\frac{dZ}{dz}$ par l'unité. Nous devrons calculer l'intégrale:

$$P_Y - iP_X = -\frac{\sigma}{2}\oint [f'(Z)]^2\, dZ\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

le long de la circonférence tout entière, en partant du point A (fig. 4) — dans le sens positif. Cette intégrale est assez compliquée, mais elle se réduit aux intégrales simples suivantes:

1) L'intégrale d'un polynome ou d'une série de Laurent:

$$\oint \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i Z^i\, dZ = \oint\left[\sum_{i=-\infty}^{-2} K_i Z^i\, dZ + K_{-1} Z^{-1}\, dZ + \sum_{i=0}^{\infty} K_i Z^i\, dZ\right] =$$

$$= 0 + K_{-1}\cdot 2\pi i + 0 = 2\pi i K_{-1}\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

2) L'intégrale:

$$\oint \frac{\lg\frac{Z}{a}}{Z^n}\, dZ = \left| -\frac{\lg\frac{Z}{a}}{(n-1)\,Z^{n-1}}\right|_{Z=a\,e^{-\pi i}}^{Z=a\,e^{\pi i}} + \frac{1}{n-1}\oint\frac{dZ}{Z^n} =$$

$$= \frac{-2\pi i}{(n-1)\cdot(-a)^{n-1}} + 0 = \frac{(-1)^n\cdot 2\pi i}{(n-1)\,a^{n-1}}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (134)$$

à l'exception du cas $n = 1$, pour lequel cette intégrale est nulle.

3) L'intégrale:

$$\oint \frac{\lg^2 \frac{Z}{a}}{Z^n}\, dZ = \left| -\frac{\lg^2 \frac{Z}{a}}{(n-1)\, Z^{n-1}} \right|_{Z=a\,e^{-\pi i}}^{Z=a\,e^{\pi i}} + \frac{2}{n-1} \oint \frac{\lg \frac{Z}{a}}{Z^n}\, dZ =$$

$$= 0 + \frac{2}{n-1} \cdot \frac{(-1)^n \cdot 2\pi i}{(n-1)\, a^{n-1}} = \frac{(\;\;1)^n \cdot 4\pi i}{(n-1)^2 \cdot a^{n-1}}, \quad \ldots \ldots \quad (135)$$

à l'exception du cas $n = 1$, pour lequel cette intégrale est nulle.

Nous pouvons calculer (132) rigoureusement de la manière suivante. La vitesse (131′) peut être mise sous la forme:

$$f'(Z) = -\frac{12\, u}{9-5\lambda} \left[\cos\alpha \cdot \frac{9-5\lambda}{12} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) - i \sin\alpha \left(\lambda \frac{Z}{a} + \frac{3+11\lambda}{12} + \frac{3-\lambda}{6} \cdot \frac{a}{Z} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{3+11\lambda}{12} \cdot \frac{a^2}{Z^2} + \lambda \frac{a^3}{Z^3} \right) + i \sin\alpha \cdot \left(\frac{a^2}{Z^2} + \frac{1+\lambda}{1} \cdot \frac{a^3}{Z^3} + \lambda \frac{a^4}{Z^4} \right) \lg \left(1 + \frac{Z}{a}\right) +$$

$$\left. + i \sin\alpha \cdot \left(1 + \frac{1+\lambda}{1} \cdot \frac{Z}{a} + \lambda \frac{Z^2}{a^2}\right) \cdot \lg \left(1 + \frac{a}{Z}\right) \right],$$

ou bien:

$$f'(Z) = -\frac{12\, u}{9-5\lambda} \left[W_1 \cos\alpha - i W_2 \sin\alpha + i \left(W_3 \lg \frac{a+Z}{a} + W_4 \lg \frac{a+Z}{Z} \right) \sin\alpha \right], \quad . \quad (136)$$

où on a posé pour abréger:

$$W_1 = \frac{9-5\lambda}{12} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right); \quad \ldots \ldots \quad (137_1)$$

$$W_2 = \lambda \frac{Z}{a} + \frac{3+11\lambda}{12} + \frac{3-\lambda}{6} \cdot \frac{a}{Z} + \frac{3+11\lambda}{12} \cdot \frac{a^2}{Z^2} + \lambda \frac{a^3}{Z^3}; \quad \ldots \quad (137_2)$$

$$W_3 = \frac{a^2}{Z^2} + \frac{1+\lambda}{1} \cdot \frac{a^3}{Z^3} + \lambda \frac{a^4}{Z^4}; \quad \ldots \ldots \quad (137_3)$$

$$W_4 = 1 + \frac{1+\lambda}{1} \cdot \frac{Z}{a} + \lambda \frac{Z^2}{a^2} \quad \ldots \ldots \quad (137_4)$$

En introduisant (136) dans (132), nous obtenons:

$$P_Y - i P_X = -\frac{72\, \sigma\, u^2}{(9-5\lambda)^2} \left[\cos^2\alpha \int W_1^2\, dZ - 2i \sin\alpha \cos\alpha \int W_1 W_2\, dZ - \sin^2\alpha \int W_2^2\, dZ + \right.$$

$$+ 2i \sin\alpha \cos\alpha \int \left(W_1 W_3 \lg \frac{a+Z}{a} + W_1 W_4 \lg \frac{a+Z}{Z} \right) dZ + 2 \sin^2\alpha \int \left(W_2 W_3 \lg \frac{a+Z}{a} + \right.$$

$$\left. + W_2 W_4 \lg \frac{a+Z}{Z} \right) dZ - \sin^2\alpha \int \left(W_3^2 \log^2 \frac{a+Z}{a} + 2 W_3 W_4 \lg \frac{a+Z}{a} \lg \frac{a+Z}{Z} + \right.$$

$$\left. \left. + W_4^2 \lg^2 \frac{a+Z}{Z} \right) dZ \right]. \quad \ldots \ldots \quad (138)$$

La première intégrale entre les crochets est nulle, en vertu de (133). Toutes les autres peuvent être groupées de la façon suivante:

$$P_Y - iP_X = -\frac{72\sigma u^2}{(9-5\lambda)^2}\Bigg[2i\sin\alpha\cos\alpha\Bigg(\int W_1 W_3 \lg\frac{a+Z}{a}\,dZ + \int W_1 W_4 \lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ -$$

$$-\int W_1 W_2\,dZ\Bigg) - \sin^2\alpha\Bigg(\int W_2^2\,dZ - 2\int W_2 W_3 \lg\frac{a+Z}{a}\,dZ - 2\int W_2 W_4 \lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ +$$

$$+\int W_3^2 \lg^2\frac{a+Z}{a}\,dZ + \int W_4^2 \lg^2\frac{a+Z}{Z}\,dZ + 2\int W_3 W_4 \lg\frac{a+Z}{a}\lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ\Bigg)\Bigg] \quad . \quad . \quad (139)$$

Les intégrales particulières se réduisent aux trois types (133, 134, 135), donc elles renferment le facteur i; cette remarque nous permet de séparer dans la formule (139) la partie réelle et imaginaire. Nous obtiendrons:

$$P_Y = -\frac{144\sigma u^2 i \sin\alpha\cos\alpha}{(9-5\lambda)^2}\Bigg(\int W_1 W_3 \lg\frac{a+Z}{a}\,dZ +$$

$$+\int W_1 W_4 \lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ - \int W_1 W_2\,dZ\Bigg); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

$$P_X = \frac{72\sigma u^2 i \sin^2\alpha}{(9-5\lambda)^2}\Bigg(\int W_2^2\,dZ - 2\int W_2 W_3 \lg\frac{a+Z}{a}\,dZ - 2\int W_2 W_4 \lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ +$$

$$+\int W_3^2 \lg^2\frac{a+Z}{a}\,dZ + \int W_4^2 \lg^2\frac{a+Z}{Z}\,dZ + 2\int W_3 W_4 \lg\frac{a+Z}{a}\lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ\Bigg). \quad . \quad (141)$$

Nous allons calculer successivement les neuf intégrales figurant dans les formules (140, 141).

$$J_1 = \int W_1 W_3 \lg\frac{a+Z}{a}\,dZ = \int W_1 W_3 \lg\frac{Z}{a}\,dZ + \int W_1 W_3 \lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ;$$

la seconde intégrale est nulle, car $\lg\frac{a+Z}{Z}$ peut être développé en série de termes ne renfermant que des puissances négatives de Z; certes, la série diverge, si $|Z| = a$, mais elle est uniformément convergente, lorsque le module $|Z|$ surpasse a d'une quantité aussi petite qu'on voudra. Or, en multipliant la série par les polynomes W_1 et W_3, nous obtenons les termes qui renferment les puissances négatives de Z à partir de Z^{-3} et dont le résidu est nul; l'intégrale étant nulle pour les valeurs du module $|Z|$ plus grandes que a, elle tend aussi vers zéro, si $|Z|$ tend vers a.

Nous trouvons ensuite, en utilisant la formule (134):

$$J_1 = \int W_1 W_3 \lg\frac{Z}{a}\,dZ = \frac{9-5\lambda}{12}\int\left[\frac{a^2}{Z^2} + (\lambda+1)\frac{a^3}{Z^3} + (\lambda-1)\frac{a^4}{Z^4} - (\lambda+1)\frac{a^5}{Z^5} - \lambda\frac{a^6}{Z^6}\right]\lg\frac{Z}{a}\,dZ =$$

$$= \frac{9-5\lambda}{12}\cdot 2\pi i\left[a - \frac{(\lambda+1)a}{2} + \frac{(\lambda-1)a}{3} + \frac{(\lambda+1)a}{4} - \frac{\lambda a}{5}\right] = \frac{(9-5\lambda)(25-7\lambda)\pi a i}{360}. \quad (142)$$

$$J_2 = \int W_1 W_4 \lg \frac{a+Z}{Z} dZ = \frac{9-5\lambda}{12} \int \Big[\lambda \frac{Z^2}{a^2} + (1+\lambda) \frac{Z}{a} +$$

$$+ (1-\lambda) - (1+\lambda) \frac{a}{Z} - \frac{a^2}{Z^2} \Big] \left(\frac{a}{Z} - \frac{a^2}{2Z^2} + \frac{a^3}{3Z^3} - \cdots\cdots \right) dZ\,;$$

en vertu de (133), il ne faut tenir compte que du terme du produit renfermant Z^{-1}, nous aurons donc:

$$J_2 = \frac{9-5\lambda}{12} \int \left(1 - \lambda - \frac{1+\lambda}{2} + \frac{\lambda}{3} \right) \frac{a}{Z} dZ = -\frac{(9-5\lambda)(7\lambda-3)\pi a i}{36} \quad . \; . \; . \; . \quad (143)$$

$$J_3 = \int W_1 W_2 \, dZ = \frac{9-5\lambda}{12} \int \left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) \left(\lambda \frac{Z}{a} + \frac{3+11\lambda}{12} + \frac{3-\lambda}{6} \cdot \frac{a}{Z} + \frac{3+11\lambda}{12} \cdot \frac{a^2}{Z^2} + \lambda \frac{a^3}{Z^3} \right) dZ\,;$$

nous appliquons encore une fois la formule (133):

$$J_3 = \frac{9-5\lambda}{12} \int \left(\frac{3-\lambda}{6} - \lambda \right) \frac{a}{Z} dZ = -\frac{(9-5\lambda)(7\lambda-3)\pi a i}{36} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (144)$$

$$J_4 = \int W_2^2 \, dZ = \int \left(\lambda \frac{Z}{a} + \frac{3+11\lambda}{12} + \frac{3-\lambda}{6} \cdot \frac{a}{Z} + \frac{3+11\lambda}{12} \cdot \frac{a^2}{Z^2} + \lambda \frac{a^3}{Z^3} \right)^2 dZ\,;$$

le même procédé donne:

$$J_4 = \int \left(2\lambda \cdot \frac{3+11\lambda}{12} + 2\, \frac{3+11\lambda}{12} \cdot \frac{3-\lambda}{6} \right) \frac{a}{Z} dZ = \frac{(3+5\lambda)(3+11\lambda)\pi a i}{18} \quad . \; . \quad (145)$$

$$J_5 = \int W_2 W_3 \lg \frac{a+Z}{a} dZ = \int W_2 W_3 \lg \frac{Z}{a} dZ + \int W_2 W_3 \lg \frac{a+Z}{Z} dZ\,;$$

la seconde partie de l' intégrale est nulle (de même que la seconde partie de J_1); la première partie peut être évaluée à l'aide de la formule (134):

$$J_5 = \int W_2 W_3 \lg \frac{Z}{a} dZ = \int \left(\lambda \frac{a}{Z} + \frac{12\lambda^2+23\lambda+3}{12} \cdot \frac{a^2}{Z^2} + \frac{23\lambda^2+12\lambda+9}{12} \cdot \frac{a^3}{Z^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{9\lambda^2+18\lambda+9}{12} \cdot \frac{a^4}{Z^4} + \frac{9\lambda^2+32\lambda+3}{12} \cdot \frac{a^5}{Z^5} + \frac{23\lambda^2+15\lambda}{12} \cdot \frac{a^6}{Z^6} + \lambda^2 \frac{a^7}{Z^7} \right) \lg \frac{Z}{a} dZ =$$

$$= 2\pi a i \left(\frac{12\lambda^2+23\lambda+3}{12} - \frac{23\lambda^2+12\lambda+9}{12 \cdot 2} + \frac{9\lambda^2+18\lambda+9}{12 \cdot 3} - \frac{9\lambda^2+32\lambda+3}{12 \cdot 4} + \right.$$

$$\left. + \frac{23\lambda^2+15\lambda}{12 \cdot 5} - \frac{\lambda^2}{6} \right) = \frac{(77\lambda^2+360\lambda+15)\pi a i}{120} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (146)$$

$$J_6 = \int W_2 W_4 \lg \frac{a+Z}{Z} dZ = \int \left(\lambda \frac{Z}{a} + \frac{3+11\lambda}{12} + \frac{3-\lambda}{6} \cdot \frac{a}{Z} + \frac{3+11\lambda}{12} \cdot \frac{a^2}{Z^2} + \lambda \frac{a^3}{Z^3} \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1+\lambda}{1} \cdot \frac{Z}{a} + \lambda \frac{Z^2}{a^2} \right) \cdot \left(\frac{a}{Z} - \frac{a^2}{2Z^2} + \frac{a^3}{3Z^3} - \frac{a^4}{4Z^4} + \cdots\cdots \right) dZ;$$

il suffit de considérer ce terme du produit des trois sommes qui renferme Z^{-1}; donc, en multipliant les deux premiers polynomes, nous nous bornons aux termes contenant des puissances positives de Z, le terme constant y compris. Il en résulte:

$$J_6 = \int \left(\frac{9\lambda^2+18\lambda+9}{12} + \frac{9\lambda^2+32\lambda+3}{12} \cdot \frac{Z}{a} + \frac{23\lambda^2+15\lambda}{12} \cdot \frac{Z^2}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{12\lambda^2}{12} \cdot \frac{Z^3}{a^3} \right) \left(\frac{a}{Z} - \frac{a^2}{2Z^2} + \frac{a^3}{3Z^3} - \cdots\cdots \right) dZ = \frac{1}{12} \int \left(\frac{9\lambda^2+18\lambda+9}{1} - \frac{9\lambda^2+32\lambda+3}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{23\lambda^2+15\lambda}{3} - \frac{12\lambda^2}{4} \right) \frac{a}{Z} dZ = \frac{(55\lambda^2+42\lambda+45)\pi a i}{36} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (147)$$

$$J_7 = \int W_3{}^2 \lg^2 \frac{a+Z}{a} dZ = \int \left(\frac{a^2}{Z^2} + \frac{1+\lambda}{1} \cdot \frac{a^3}{Z^3} + \lambda \frac{a^4}{Z^4} \right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{a} - \frac{Z^2}{2a^2} + \frac{Z^3}{3a^3} - \frac{Z^4}{4a^4} + \cdots\cdots \right)^2 dZ =$$

$$= \int \left(\frac{a^4}{Z^4} + \frac{2+2\lambda}{1} \cdot \frac{a^5}{Z^5} + \frac{1+4\lambda+\lambda^2}{1} \cdot \frac{a^6}{Z^6} + \frac{2\lambda+2\lambda^2}{1} \cdot \frac{a^7}{Z^7} + \lambda^2 \frac{a^8}{Z^8} \right) \cdot \left(\frac{Z^2}{a^2} - \frac{Z^3}{a^3} + \frac{11}{12} \cdot \frac{Z^4}{a^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{6} \cdot \frac{Z^5}{a^5} + \frac{137}{180} \cdot \frac{Z^6}{a^6} - \frac{7}{10} \cdot \frac{Z^7}{a^7} + \cdots\cdots \right) dZ;$$

nous trouvons, en appliquant la formule (133):

$$J_7 = \int \left(-1 + \frac{11+11\lambda}{6} - \frac{5+20\lambda+5\lambda^2}{6} + \frac{274\lambda+274\lambda^2}{180} - \frac{7\lambda^2}{10} \right) \frac{a}{Z} dZ = \frac{(2\lambda-\lambda^2)\pi a i}{45} \quad . \quad (148)$$

$$J_8 = \int W_4{}^2 \lg^2 \frac{a+Z}{Z} dZ = \int \left(1 + \frac{1+\lambda}{1} \cdot \frac{Z}{a} + \lambda \frac{Z^2}{a^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{a}{Z} - \frac{a^2}{2Z^2} + \frac{a^3}{3Z^3} - \frac{a^4}{4Z^4} + \cdots\cdots \right)^2 dZ =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2+2\lambda}{1} \cdot \frac{Z}{a} + \frac{1+4\lambda+\lambda^2}{1} \cdot \frac{Z^2}{a^2} + \frac{2\lambda+2\lambda^2}{1} \cdot \frac{Z^3}{a^3} + \lambda^2 \frac{Z^4}{a^4} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{Z^2} - \frac{a^3}{Z^3} + \frac{11}{12} \cdot \frac{a^4}{Z^4} - \frac{5}{6} \cdot \frac{a^5}{Z^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{137}{180} \cdot \frac{a^6}{Z^6} - \frac{7}{10} \cdot \frac{a^7}{Z^7} + \cdots\cdots \right) dZ;$$

la formule (133) peut servir encore cette fois-ci:

$$J_8 = \int \left(\frac{2+2\lambda}{1} - \frac{1+4\lambda+\lambda^2}{1} + \frac{11\lambda+11\lambda^2}{6} - \frac{5\lambda^2}{6} \right) \frac{a}{Z} dZ = \frac{(6-\lambda)\pi a i}{3} \quad . \; . \; . \quad (149)$$

$$J_9 = \int W_3\, W_4 \lg \frac{a+Z}{a} \lg \frac{a+Z}{Z}\, dZ\,;$$

cette intégrale présente certaines difficultés; remarquons d'abord que le produit $W_3\, W_4$ ne renferme pas des puissances positives de Z, donc, après avoir effectué la transformation suivante:

$$J_9 = \int W_3\, W_4 \lg \frac{Z}{a} \lg \frac{a+Z}{Z}\, dZ + \int W_3\, W_4 \lg^2 \frac{a+Z}{Z}\, dZ\,,$$

nous pouvons négliger la seconde partie qui est nulle. Nous trouvons ensuite:

$$J_9 = \int W_3\, W_4 \lg \frac{Z}{a} \lg \frac{a+Z}{Z}\, dZ = \int \Big(\lambda + \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{1} \cdot \frac{a}{Z} + \frac{2+2\lambda+2\lambda^2}{1} \cdot \frac{a^2}{Z^2} +$$

$$+ \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{1} \cdot \frac{a^3}{Z^3} + \lambda \frac{a^4}{Z^4}\Big) \lg \frac{Z}{a} \lg \frac{a+Z}{Z}\, dZ\,; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (150)$$

l'intégrale doit être divisée maintenant en deux parties, car le terme renfermant $\frac{a}{Z}$ exige un procédé distinct. Nous obtenons:

$$J_{9,1} = (1+2\lambda+\lambda^2) \int \lg \frac{a+Z}{Z} \lg \frac{Z}{a} \cdot \frac{a}{Z}\, dZ = \frac{(1+2\lambda+\lambda^2)\, a}{2} \int \lg \frac{a+Z}{Z}\, d\Big(\lg^2 \frac{Z}{a}\Big) =$$

$$= \left| \frac{(1+2\lambda+\lambda^2)\, a}{2} \lg \frac{a+Z}{Z} \cdot \lg^2 \frac{Z}{a} \right|_{Z=ae^{-\pi i}}^{Z=ae^{\pi i}} + \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{2} \int \frac{\lg^2 \frac{Z}{a}}{1+\frac{a}{Z}} \cdot \frac{a^2}{Z^2}\, dZ\,.$$

Le premier terme est nul; il ne reste donc que le second qui peut être transformé de la manière suivante:

$$J_{9,1} = \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{2} \int \frac{a^2}{Z^2} \Big(1 - \frac{a}{Z} + \frac{a^2}{Z^2} - \frac{a^3}{Z^3} + \frac{a^4}{Z^4} - \cdots\Big) \lg^2 \frac{Z}{a}\, dZ =$$

$$= \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{2} \int \Big(\frac{a^2}{Z^2} - \frac{a^3}{Z^3} + \frac{a^4}{Z^4} - \frac{a^5}{Z^5} + \frac{a^6}{Z^6} - \cdots\Big) \lg^2 \frac{Z}{a}\, dZ =$$

$$= \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{2} \int \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{Z^n} \lg^2 \frac{Z}{a}\, dZ\,,$$

d'où, en vertu de (135):

$$J_{9,1} = \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n \cdot 4\pi i}{(n-1)^2 a^{n-1}} = 2\,(1+2\lambda+\lambda^2)\, \pi\, a\, i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} =$$

$$= 2\,(1+2\lambda+\lambda^2)\, \pi\, a\, i \cdot \Big(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\Big) =$$

$$= 2\,(1+2\lambda+\lambda^2)\, \pi\, a\, i \cdot \frac{\pi^2}{6} = (\lambda^2+2\lambda+1)\, \frac{\pi^3\, a\, i}{3}\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (151)$$

Il nous faut encore calculer la partie restante de l'intégrale (150):

$$J_{9,2}=\int\left(\lambda+\frac{2+2\lambda+2\lambda^2}{1}\cdot\frac{a^2}{Z^2}+\frac{1+2\lambda+\lambda^2}{1}\cdot\frac{a^3}{Z^3}+\lambda\frac{a^4}{Z^4}\right)\lg\frac{a+Z}{Z}\lg\frac{Z}{a}\,dZ; \quad . \quad . \quad (152)$$

nous pouvons intégrer par parties, en posant:

$$u=\lg\frac{a+Z}{Z}\lg\frac{Z}{a};\quad du=\frac{1}{Z}\lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ-\frac{a}{Z(a+Z)}\lg\frac{Z}{a}\,dZ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

$$dv=\left(\lambda+\frac{2+2\lambda+2\lambda^2}{1}\cdot\frac{a^2}{Z^2}+\frac{1+2\lambda+\lambda^2}{1}\cdot\frac{a^3}{Z^3}+\lambda\frac{a^4}{Z^4}\right)dZ;$$

$$v=\lambda Z+C-\frac{2+2\lambda+2\lambda^2}{1}\cdot\frac{a^2}{Z}-\frac{1+2\lambda+\lambda^2}{2}\cdot\frac{a^3}{Z^2}-\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^4}{Z^3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

C est une constante arbitraire; mais il convient de la choisir d'une manière telle que le polynome v soit divisible par $(a+Z)$; nous trouvons:

$$C=-\frac{(9\lambda^2+2\lambda+9)\,a}{6};$$

$$v=(a+Z)\left(\lambda-\frac{9+8\lambda+9\lambda^2}{6}\cdot\frac{a}{Z}-\frac{3+4\lambda+3\lambda^2}{6}\cdot\frac{a^2}{Z^2}-\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^3}{Z^3}\right); \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

nous effectuons maintenant l'intégration par parties dans la formule (152):

$$J_{9,2}=\left|v\lg\frac{a+Z}{Z}\lg\frac{Z}{a}\right|_{Z=ae^{-\pi i}}^{Z=ae^{\pi i}}-\int\frac{v}{Z}\lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ+\int\frac{av}{Z(Z+a)}\lg\frac{Z}{a}\,dZ=$$

$$=0-\int\left(\lambda-\frac{9+2\lambda+9\lambda^2}{6}\cdot\frac{a}{Z}-\frac{2+2\lambda+2\lambda^2}{1}\cdot\frac{a^2}{Z^2}-\frac{1+2\lambda+\lambda^2}{2}\cdot\frac{a^3}{Z^3}-\frac{\lambda}{3}\frac{a^4}{Z^4}\right)\lg\frac{a+Z}{Z}\,dZ+$$

$$+\int\left(\lambda\frac{a}{Z}-\frac{9+8\lambda+9\lambda^2}{6}\cdot\frac{a^2}{Z^2}-\frac{3+4\lambda+3\lambda^2}{6}\cdot\frac{a^3}{Z^3}-\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^4}{Z^4}\right)\lg\frac{Z}{a}\,dZ.$$

Nous avons obtenu deux intégrales différentes; dans la première, il faut développer $\lg\frac{a+Z}{Z}$ suivant les puissances de $\frac{a}{Z}$ et se borner au terme du produit renfermant Z^{-1}; la seconde intégrale peut être calculée à l'aide de la formule (134). Nous aurons donc:

$$J_{9,2}=-\int\lambda\frac{a}{Z}\,dZ-\int\left(\frac{9+8\lambda+9\lambda^2}{6}\cdot\frac{a^2}{Z^2}+\frac{3+4\lambda+3\lambda^2}{6}\cdot\frac{a^3}{Z^3}+\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{a^4}{Z^4}\right)\lg\frac{Z}{a}\,dZ=$$

$$=-2\lambda\cdot\pi ai-2\pi ai\left(\frac{9+8\lambda+9\lambda^2}{6}-\frac{3+4\lambda+3\lambda^2}{12}+\frac{\lambda}{9}\right)=-\frac{(45\lambda^2+76\lambda+45)\,\pi ai}{18}. \quad . \quad . \quad (156)$$

En comparant (150, 151, 156), nous trouvons enfin:

$$J_9 = J_{9,1} + J_{9,2} = \frac{(\lambda^2 + 2\lambda + 1)\,\pi^3 ai}{3} - \frac{(45\lambda^2 + 76\lambda + 45)\,\pi ai}{18} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (157)$$

Nous avons ainsi toutes les intégrales cherchées, ce qui permet d'obtenir immédiatement P_Y et P_X. La formule (140) donne, en vertu de (142 ÷ 144):

$$P_Y = -\frac{144\sigma u^2 i \sin\alpha \cos\alpha}{(9 - 5\lambda)^2}(J_1 + J_2 + J_3)$$

ou

$$\boxed{P_Y = \frac{2\pi(25 - 7\lambda)\,\sigma a u^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{5(9 - 5\lambda)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (158)$$

Nous trouvons ensuite P_X, en introduisant (145 ÷ 149) et (157) dans (141):

$$P_X = \frac{72\,\sigma u^2 i \sin^2\alpha}{(9 - 5\lambda)^2}(J_4 - 2J_5 - 2J_6 + J_7 + J_8 + 2J_9)$$

ou

$$\boxed{P_X = \frac{2\pi\,[1135\lambda^2 + 2592\lambda + 945 - 120\pi^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1)]\,\sigma a u^2 \sin^2\alpha}{5(9 - 5\lambda)^2}} \quad . \; . \; . \quad (159)$$

§ 10.

L'intégrale (132), que nous venons de calculer d'une manière tout-à-fait exacte, peut être calculée approximativement par une méthode plus simple. Nous allons exposer cette méthode, non seulement pour vérifier les résultats, mais aussi pour indiquer les calculs analogues concernant les profils transformés auxquels cette méthode sera probablement mieux adaptée que la méthode exacte trop compliquée.

Revenons à la formule (136) que nous transformerons de la façon suivante:

$$f'(Z) = -\frac{12u}{9-5\lambda}\left[W_1 \cos\alpha - iW_2 \sin\alpha + i(W_3 + W_4)\lg\frac{a+Z}{Z}\sin\alpha + iW_3 \lg\frac{Z}{a}\sin\alpha\right] =$$

$$= -\frac{12u}{9-5\lambda}\left\{W_1 \cos\alpha - i\left[W_2 - (W_3 + W_4)\left(\frac{a}{Z} - \frac{a^2}{2Z^2} + \frac{a^3}{3Z^3} - \cdots\right)\right]\sin\alpha + iW_3 \lg\frac{Z}{a}\sin\alpha\right\};$$

cette expression peut être écrite encore dans la forme abrégée:

$$f'(Z) = -\frac{12u}{9-5\lambda}\left(W_1 \cos\alpha - iW\sin\alpha + iW_3 \lg\frac{Z}{a}\sin\alpha\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (160)$$

où on a posé:

$$W = W_2 - (W_3 + W_4)\cdot\left(\frac{a}{Z} - \frac{a^2}{2Z^2} + \frac{a^3}{3Z^3} - \cdots\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (161)$$

Après avoir substitué (137_2, 137_3, 137_4) et effectué une multiplication assez pénible, on parvient au développement suivant de W (nous nous sommes bornés aux dix premiers termes, ce qui assure déjà une exactitude parfaite):

$$W = -\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{12}\lambda\right)+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{6}\lambda\right)\frac{a^2}{Z^2}+\left(-\frac{13}{12}+\frac{21}{20}\lambda\right)\frac{a^3}{Z^3}+\left(-\frac{9}{20}-\frac{31}{30}\lambda\right)\frac{a^4}{Z^4}+$$

$$+\left(\frac{2}{15}-\frac{10}{21}\lambda\right)\frac{a^5}{Z^5}+\left(-\frac{5}{84}+\frac{25}{168}\lambda\right)\frac{a^6}{Z^6}+\left(\frac{9}{280}-\frac{5}{72}\lambda\right)\frac{a^7}{Z^7}+\left(-\frac{7}{360}+\frac{7}{180}\lambda\right)\frac{a^8}{Z^8}+$$

$$+\left(\frac{4}{315}-\frac{4}{165}\lambda\right)\frac{a^9}{Z^9}+\left(-\frac{27}{3080}+\frac{5}{308}\lambda\right)\frac{a^{10}}{Z^{10}}+\cdots \quad (162)$$

L'expression (160) introduite dans (132) donne:

$$P_Y - iP_X = -\frac{72\,\sigma u^2}{(9-5\lambda)^2}\int\left(W_1\cos\alpha - i\,W\sin\alpha + i\,W_3\lg\frac{Z}{a}\sin\alpha\right)^2 dZ =$$

$$= -\frac{72\,\sigma u^2}{(9-5\lambda)^2}\left[\int (W_1\cos\alpha - i\,W\sin\alpha)^2\,dZ + 2i\sin\alpha\cos\alpha\int W_1\,W_3\lg\frac{Z}{a}\,dZ + \right.$$

$$\left. + 2\sin^2\alpha\int W\,W_3\lg\frac{Z}{a}\,dZ - \sin^2\alpha\int W_3{}^2\lg^2\frac{Z}{a}\,dZ\right];$$

la première intégrale entre les crochets est nulle, puisqu'elle ne renferme pas de terme avec Z^{-1}; le reste peut être divisé en partie réelle et imaginaire:

$$P_Y = -\frac{144\,\sigma u^2 i\sin\alpha\cos\alpha}{(9-5\lambda)^2}\int W_1\,W_3\lg\frac{Z}{a}\,dZ\,; \quad (163)$$

$$P_X = -\frac{72\,\sigma u^2 i\sin^2\alpha}{(9-5\lambda)^2}\left(2\int W\,W_3\lg\frac{Z}{a}\,dZ - \int W_3{}^2\lg^2\frac{Z}{a}\,dZ\right) \quad (164)$$

Les formules (163) et (140) sont identiques, ce qu'on prouvera aisément, en examinant le calcul des intégrales J_1, J_2, J_3. Mais la formule (164) est beaucoup plus simple que (141); elle donne la valeur approximative de P_X à l'aide du calcul suivant. Nous commençons par la multiplication:

$$W\,W_3 = \left(-\frac{3}{4}+\frac{5}{12}\lambda\right)\frac{a^2}{Z^2}+\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\lambda+\frac{5}{12}\lambda^2\right)\frac{a^3}{Z^3}+\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\lambda+\frac{5}{12}\lambda^2\right)\frac{a^4}{Z^4}+$$

$$+\left(-\frac{2}{3}+\frac{23}{10}\lambda+\frac{5}{6}\lambda^2\right)\frac{a^5}{Z^5}+\left(-\frac{23}{15}-\frac{13}{20}\lambda+\frac{113}{60}\lambda^2\right)\frac{a^6}{Z^6}+\left(-\frac{19}{60}-\frac{213}{70}\lambda+\frac{1}{60}\lambda^2\right)\frac{a^7}{Z^7}+$$

$$+\left(\frac{31}{420}-\frac{541}{840}\lambda-\frac{317}{210}\lambda^2\right)\frac{a^8}{Z^8}+\left(-\frac{23}{840}+\frac{193}{1260}\lambda-\frac{55}{168}\lambda^2\right)\frac{a^9}{Z^9}+\left(\frac{4}{315}-\frac{73}{1260}\lambda+\frac{5}{63}\lambda^2\right)\frac{a^{10}}{Z^{10}}+$$

$$+\left(-\frac{17}{2520}+\frac{1}{36}\lambda-\frac{11}{360}\lambda^2\right)\frac{a^{11}}{Z^{11}}+\left(\frac{109}{27720}-\frac{409}{27720}\lambda+\frac{29}{1980}\lambda^2\right)\frac{a^{12}}{Z^{12}}+\cdots,$$

d'où — selon (134):

$$J_0 = \int W W_3 \lg \frac{Z}{a} dZ = 2\pi a i \Big(-\frac{3}{4} + \frac{5}{12}\lambda + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\lambda - \frac{5}{24}\lambda^2 + \frac{5}{36} + \frac{1}{36}\lambda + \frac{5}{36}\lambda^2 +$$

$$+\frac{1}{6} - \frac{23}{40}\lambda - \frac{5}{24}\lambda^2 - \frac{23}{75} - \frac{13}{100}\lambda + \frac{113}{300}\lambda^2 + \frac{19}{360} + \frac{71}{140}\lambda - \frac{1}{360}\lambda^2 + \frac{31}{2940} - \frac{541}{5880}\lambda -$$

$$-\frac{317}{1470}\lambda^2 + \frac{23}{6720} - \frac{193}{10080}\lambda + \frac{55}{1344}\lambda^2 + \frac{4}{2835} - \frac{73}{11340}\lambda + \frac{5}{567}\lambda^2 + \frac{17}{25200} - \frac{1}{360}\lambda +$$

$$+\frac{11}{3600}\lambda^2 + \frac{109}{304920} - \frac{409}{304920}\lambda + \frac{29}{21780}\lambda^2 + \cdots\Big) = 2\pi a i(-S_1 + S_2\lambda - S_3\lambda^2), \quad (165)$$

où S_1, S_2, S_3 désignent respectivement les sommes des séries infinies:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{4} - \frac{3}{8} - \frac{5}{36} - \frac{1}{6} + \frac{23}{75} - \frac{19}{360} - \frac{31}{2940} - \frac{23}{6720} - \frac{4}{2835} - \frac{17}{25200} - \frac{109}{304920} - \cdots \\ S_2 &= \frac{5}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} - \frac{23}{40} - \frac{13}{100} + \frac{71}{140} - \frac{541}{5880} - \frac{193}{10080} - \frac{73}{11340} - \frac{1}{360} - \frac{409}{304920} - \cdots \\ S_3 &= \frac{5}{24} - \frac{5}{36} + \frac{5}{24} - \frac{113}{300} + \frac{1}{360} + \frac{317}{1470} - \frac{55}{1344} - \frac{5}{567} - \frac{11}{3600} - \frac{29}{21780} - \cdots \end{aligned}\right\} . \quad (166)$$

Nous trouvons ensuite l'autre partie de l'intégrale (164), en utilisant la transformation de J_7 et la formule (135):

$$J_{00} = \int W_3^2 \lg^2 \frac{Z}{a} dZ = 4\pi a i \left(\frac{1}{9} - \frac{2+2\lambda}{16} + \frac{1+4\lambda+\lambda^2}{25} - \frac{2\lambda+2\lambda^2}{36} + \frac{\lambda^2}{49}\right) =$$

$$= 4\pi a i (T_1 - T_2\lambda + T_3\lambda^2), \quad (167)$$

où T_1, T_2, T_3 désignent respectivement les sommes finies:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{25} \\ T_2 &= \frac{1}{8} - \frac{4}{25} + \frac{1}{18} \\ T_3 &= \frac{1}{25} - \frac{1}{18} + \frac{1}{49} \end{aligned}\right\} \quad (168)$$

En introduisant (165) et (168) dans (164), nous obtenons enfin:

$$P_X = -\frac{72\sigma u^2 i \sin^2\alpha}{(9-5\lambda)^2}(2J_0 - J_{00}) = -\frac{72\sigma u^2 i \sin^2\alpha}{(9-5\lambda)^2}\cdot 4\pi a i[-(S_1+T_1) + (S_2+T_2)\lambda - (S_3+T_3)\lambda^2] =$$

$$= \frac{2\pi[-(720 S_1 + 720 T_1) + (720 S_2 + 720 T_2)\lambda - (720 S_3 + 720 T_3)\lambda^2]\sigma a u^2 \sin^2\alpha}{5(9-5\lambda)^2}. \quad (169)$$

Il faut vérifier l'identité des formules (159) et (169); il suffit pour cela de comparer les coefficients correspondants de ces formules. Or, nous avons dans (159):

$$120\,\pi^2 - 945 = 239{,}352\ldots..$$

$$2592 - 240\,\pi^2 = 223{,}295\ldots..$$

$$120\,\pi^2 - 1135 = 49{,}352\ldots..$$

tandis que les coefficients de (169) s'évaluent approximativement — d'après (166) et (168):

$$720\,T_1 + 720\,S_1 = 80 - 90 + 28{,}8 + 540 - 270 - 100 - 120 + 220{,}8 - 38 - 7{,}59184\ldots -$$
$$- 2{,}46429\ldots - 1{,}01587\ldots - 0{,}48571\ldots - 0{,}37544\ldots - \cdots\cdots \cong 239{,}667;$$

$$720\,T_2 + 720\,S_2 = 90 - 115{,}2 + 40 + 300 + 120 + 20 - 414 - 93{,}6 + 365{,}14286\ldots -$$
$$- 66{,}24490\ldots - 13{,}78571\ldots - 4{,}63492\ldots - 2 - 0{,}96576\ldots - \cdots\cdots \cong 224{,}712;$$

$$720\,T_3 + 720\,S_3 = 28{,}8 - 40 + 14{,}69388\ldots - 150 - 100 + 150 - 271{,}2 + 2 +$$
$$+ 155{,}26531\ldots - 29{,}46429\ldots - 6{,}34921\ldots - 2{,}2 - 0{,}95868\ldots - \cdots\cdots \cong 50{,}587.$$

La concordance des coefficients est excellente quoique nous avons pris relativement peu de termes; de plus, les termes de nos séries sont négatifs à partir d'un certain point, les signes des restes sont donc justes. Cela confirme l'exactitude des formules (158) et (159).

§ 11.

Les valeurs de P_X et P_Y établies, nous pouvons trouver immédiatement les composantes P_{X1} et P_{Y1} (dans la direction du courant et dans la direction perpendiculaire à la précédente — voir la fig. 1). Nous pouvons encore cette fois-ci négliger les puissances supérieures de $\sin\alpha$ à partir de $\sin^3\alpha$. Nous obtiendrons:

$$P_{Y1} - i P_{X1} = e^{-i\alpha}\,(P_Y - i P_X),$$

d'où:

$$P_{Y1} = P_Y \cos\alpha - P_X \sin\alpha = \frac{2\pi\,(25-7\lambda)\,\sigma a u^2 \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{5\,(9-5\lambda)} - P_X \sin\alpha,$$

ou bien:

$$\boxed{P_{Y1} \cong \frac{2\pi\,(25-7\lambda)\,\sigma a u^2 \sin\alpha}{5\,(9-5\lambda)}.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (170)$$

Ensuite:

$$P_{X1} = P_Y \sin\alpha + P_X \cos\alpha = \frac{2\pi\,(25-7\lambda)\,\sigma a u^2 \sin^2\alpha\cos\alpha}{5\,(9-5\lambda)} +$$
$$+ \frac{2\pi\,[(1135-120\pi^2)\,\lambda^2 + (2592-240\pi^2)\,\lambda + (945-120\pi^2)]\,\sigma a u^2 \sin^2\alpha\cos\alpha}{5\,(9-5\lambda)^2} \cong$$
$$\cong \frac{2\pi\,[(1135-120\pi^2)\,\lambda^2 + (2592-240\pi^2)\,\lambda + (945-120\pi^2) + (25-7\lambda)\,(9-5\lambda)]\,\sigma a u^2 \sin^2\alpha}{5\,(9-5\lambda)^2},$$

ou bien:

$$P_{X1} \cong \frac{2\pi\,[(1170-120\pi^2)\,\lambda^2+(2404-240\pi^2)\,\lambda+(1170-120\pi^2)]\,\sigma\,a\,u^2\sin^2\alpha}{5\,(9-5\lambda)^2} \quad . \quad (171)$$

La dernière formule peut être écrite encore dans la forme plus courte:

$$P_{X1}=\frac{2\pi\,(-14{,}3525\,\lambda^2+35{,}2949\,\lambda-14{,}3525)\,\sigma\,a\,u^2\sin^2\alpha}{5\,(9-5\lambda)^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (171\text{a})$$

Pour comparer définitivement le potentiel complémentaire (124) avec (27) nous avons besoin encore de l'expression pour la circulation le long de la circonférence. Nous la trouverons immédiatement, en introduisant (129) dans la formule (31):

$$C=f_1\left(a\,e^{\pi i}\right)-f_1\left(a\,e^{-\pi i}\right);$$

il suffit de prendre la constante cyclique de $\lg\left(1+\frac{Z}{a}\right)$ multipliée par la valeur correspondante du facteur rationnel, car les accroissements des termes restants sont nuls. Il vient donc:

$$C=\frac{12\,a\,u\,i\sin\alpha}{5\lambda-9}\cdot 2\pi i\left(1-\frac{1+\lambda}{2}+\frac{\lambda}{3}\right),$$

ou bien:

$$C=\frac{4\pi\,(3-\lambda)\,a\,u\sin\alpha}{9-5\lambda} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (172)$$

Les valeurs numériques de C, P_{Y1}, P_{X1}, correspondant à quelques valeurs de λ, se trouvent dans la table suivante, qui est illustrée par les diagrammes (fig. 6, 7, 8).

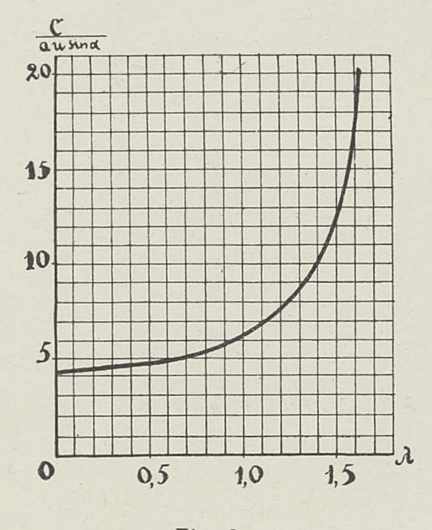


Fig. 6.

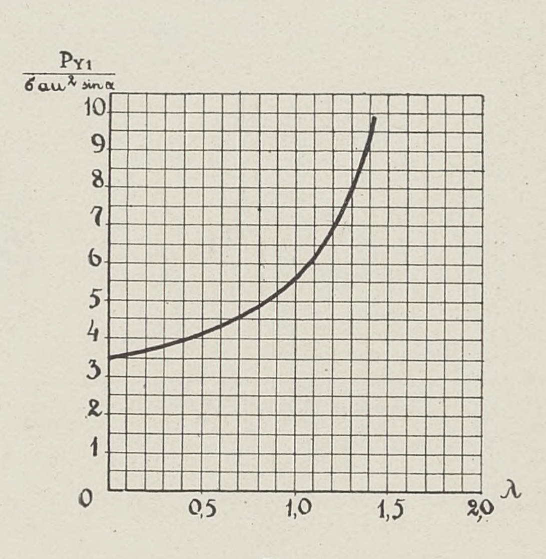


Fig. 7.

λ	$\frac{C}{a u \sin\alpha}$	$\frac{P_{Y1}}{\sigma a u^2 \sin\alpha}$	$\frac{P_{X1}}{\sigma a u^2 \sin^2\alpha}$	λ	$\frac{C}{a u \sin\alpha}$	$\frac{P_{Y1}}{\sigma a u^2 \sin\alpha}$	$\frac{P_{X1}}{\sigma a u^2 \sin^2\alpha}$
0	4,1888	3,4907	−0,2227	1,1	6,8717	6,2114	0,7288
0,1	4,2874	3,5925	−0,1907	1,15	7,1532	6,5538	0,8632
0,2	4,3982	3,7070	−0,1545	1,2	7,5398	6,9534	1,0740
0,3	4,5229	3,8369	−0,1261	1,25	7,9968	7,4256	1,2197
0,4	4,6675	3,9853	−0,0649	1,3	8,5451	7,9922	1,4678
0,5	4,8332	4,1566	−0,0087	1,34	9,0696	8,5342	1,7035
0,6	5,0265	4,3564	0,0579	1,4	10.0531	9,5504	2,1769
0,7	5,2550	4,5924	0,1380	1,5	12,5664	12,1475	3,5168
0,8	5,5292	4,8758	0,2361	1,6	17,5929	17,3416	6,7568
0,9	5,8643	5,2220	0,3591	1,7	32,6726	32,9238	20,9612
1,0	6,2832	5,6549	0,5176	1,8	∞	∞	∞

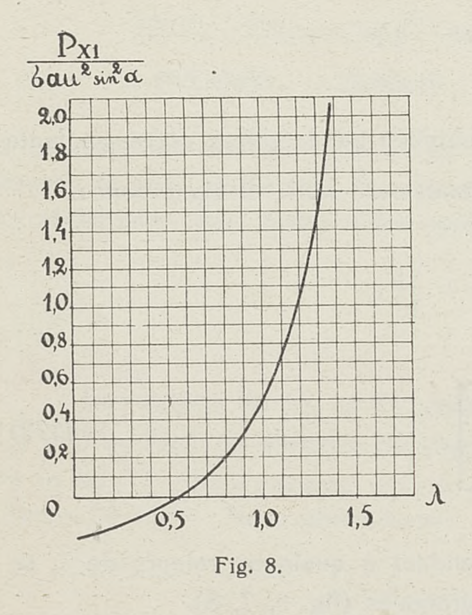


Fig. 8.

Les résultats peuvent être comparés avec ceux qui sont représentés sur la fig. 5. Nous remarquons de nouveau que le potentiel (129) donne les valeurs des intégrales caractéristiques voisines de (32, 34, 34′), si le paramètre λ varie entre 1,1 et 1,4. En particulier, nous obtenons les valeurs tout-à-fait justes:

1) de C — pour $\lambda \cong 1,25$,

2) „ P_{Y1} — „ $\lambda \cong 1,26$,

3) „ P_{X1} — „ $\lambda \cong 1,10$.

Ces valeurs de λ ne diffèrent pas beaucoup, mais elles ne sont pas identiques. C'était à prévoir, car le nombre des paramètres arbitraires que nous avons introduit est certainement trop petit. En augmentant leur nombre, on peut obtenir l'exactitude voulue. En tout cas, le type de potentiel dont il s'agit, semble être inférieur au potentiel de quatre tourbillons à cause des difficultés sérieuses qu'il présente dans les applications. C'est pour cette raison que nous ne les avons pas poussées plus loin.